А.Д.АЛЕКСАНДРОВ А.Л.ВЕРНЕР В.И.РЫЖИК

ГЕОМЕТРИЯ

9·10

А.Д.АЛЕКСАНДРОВ
А.Л.ВЕРНЕР
В.И.РЫЖИК

ГЕОМЕТРИЯ

ПРОБНЫЙ УЧЕБНИК
ДЛЯ 9—10 КЛАССОВ
СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Рекомендовано
Главным управлением общего
среднего образования
Министерства просвещения
СССР

Издание второе, переработанное

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1987

ББК 22.151я72
А46

Условные обозначения

■ — окончание доказательства утверждения

* — дополнительный материал для интересующихся математикой

▲ ▼ — ознакомительный материал

Рецензенты:
кандидат физ.-мат. наук, доцент МГПИ им. В. И. Ленина *К. И. Дуничев;*
учитель математики школы № 67 Москвы *Л. И. Звавич*

Александров А. Д. и др.
А46 Геометрия: Проб. учеб. для 9—10 кл. сред. шк./ А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик.— 2-е изд., перераб.— М.: Просвещение, 1987.—272 с.: ил.

А $\frac{4306020000-438}{103(03)-87}$ инф. письмо — 87 **ББК 22.151я72**

ВВЕДЕНИЕ

I

В предыдущих классах мы изучали главным образом геометрию на плоскости — планиметрию, а теперь будем заниматься геометрией в пространстве. Ее называют стереометрией (от греческих слов «стереос» — телесный, пространственный, «метрео» — измеряю).

Обращаясь к геометрии в пространстве — к стереометрии, будем предполагать, что геометрия на плоскости — планиметрия — нам в основном известна.

Каждый представляет, что такое плоскость или, по крайней мере, конечный кусок плоскости, как поверхность стола, доски и т. п. В планиметрии плоскость рассматривается сама по себе, независимо от окружающего пространства. В стереометрии же плоскость — это фигура в пространстве, и в нем много плоскостей. На каждой из них выполняется планиметрия.

Вместе с каждой плоскостью в пространстве есть содержащиеся в ней известные нам фигуры — точки, отрезки, углы, треугольники, окружности и т. д. Основными свойствами этих фигур, теоремами о них, доказанными в планиметрии, мы будем постоянно пользоваться.

Однако важнейшие в стереометрии — пространственные фигуры, не лежащие ни в какой плоскости. Если любое реальное тело рассматривалось с точки зрения только формы и размеров, считая их абсолютно точными, то это пространственная фигура, «геометрическое тело», т. е. тело, как его понимают в геометрии. Простейшие знакомые вам тела изображены на рисунке 1: а) шар; б) куб; в) параллелепипед; г) пирамида; д) призма; е) цилиндр; ж) конус.

Напомним, что **куб** — это многогранник, у которого шесть граней и все они квадраты. **Прямоугольный параллелепипед** —

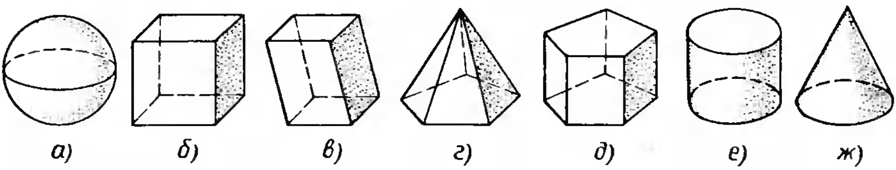


Рис. 1.

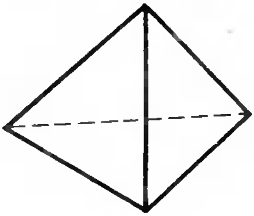


Рис. 2

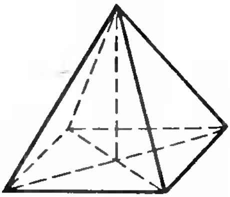


Рис. 3

это многогранник, у которого шесть граней и все они прямоугольники. А вообще **параллелепипед** — это многогранник, у которого шесть граней и все они параллелограммы.

Пирамидой называется многогранник, у которого одна грань — какой-либо многоугольник, а остальные грани — треугольники с общей вершиной. Первая грань называется **основанием пирамиды**, остальные же называются **боковыми гранями**; их общая вершина называется **вершиной пирамиды**. Стороны граней пирамиды называются ее **ребрами**, причем ребра, сходящиеся в вершине, называются **боковыми**.

Если основание пирамиды n-угольник, то она называется n-угольной. Простейшей среди всех пирамид (и даже среди всех многогранников) является треугольная пирамида, которую называют также **тетраэдром**, т. е. четырехгранником (рис. 2). У тетраэдра четыре грани и все они треугольники.

Пирамида называется **правильной**, если ее основание — правильный многоугольник, а все боковые ребра равны (рис. 3). Знаменитые египетские пирамиды — правильные четырехугольные.

Тетраэдр же называется **правильным**, если все его грани — правильные треугольники (т. е. все его ребра равны). Правильный тетраэдр — это частный случай правильной треугольной пирамиды.

Отличие рисунков, употребляемых в стереометрии (например, рис. 1—3), от тех, какими иллюстрируется курс планиметрии, состоит в том, что на плоскости рисунка (в книге, в тетради, на доске) изображаем не только плоские, но и пространственные фигуры. Основные правила и приемы таких изображений известны из курса черчения и будут обоснованы в курсе стереометрии. Перечислим три самых простых из них.

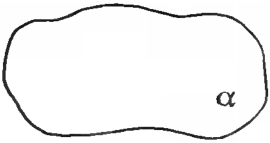


Рис. 4

1) Плоскость изображается в виде произвольной области (рис. 4), а иногда в виде параллелограмма.

2) Параллельные отрезки (как и прямые) изображаются параллельными отрезками (как при изображении куба, параллелепипеда, призмы на рисунке 1).

3) Середина отрезка изображается как середина изображающего его отрезка.

Очень важно уметь правильно, наглядно изобразить пространственную фигуру и, наоборот, посмотрев на рисунок, представить себе форму пространственной фигуры, изображенной на нем. Это трудно, но этому можно научиться.

Тематический материал учебника разбит на две части — основную и дополнительную.

Основная часть, во-первых, содержит теоретические сведения (аксиомы, определения, теоремы), которые надо твердо усвоить и уметь применять при решении задач. После каждой главы этот теоретический материал кратко формулируется в специальном разделе «Выводы».

Во-вторых, к основной части относится материал, в котором рассказано о значении наиболее важных геометрических результатов, о различных применениях стереометрии в других науках, технике, искусстве, быту, об истории геометрии. С этим материалом, отмеченным значками ▲ (начало) и ▼ (конец), следует ознакомиться. Он поможет вам понять роль геометрии и ее место в современной культуре.

В дополнительном материале с большей глубиной и подробностью обсуждаются самые трудные вопросы курса. Этот материал рассчитан на учащихся, особенно интересующихся математикой. Он отмечен значком*.

Из задач к параграфу выделены задачи, которые названы основными. Их решение считаем обязательным. Почти ко всем параграфам есть дополнительные задачи, приведенные в конце главы.

II

Своеобразие геометрии заключается в неразрывной связи живого воображения со строгой логикой. Можно сказать, что геометрия в своей сути и есть пространственное воображение, пронизанное и организованное строгой логикой. Во всяком подлинно геометрическом предложении, будь то аксиома, определение, теорема или задача, непременно присутствуют эти оба элемента: наглядная картина и строгая формулировка, строгий логический вывод.

Наглядность, воображение принадлежат больше искусству, строгая логика — привилегия науки. Сухость точного вывода и живость наглядной картины — «лед и пламень не столь различны меж собой». Геометрия соединяет в себе эти две противоположности. Так ее и надо изучать: соединяя наглядные картины со строгими формулировками и доказательствами.

Поэтому основное правило состоит в том, что, встречаясь с определением, теоремой или задачей, нужно прежде всего понять их содержание: представить наглядно, нарисовать или еще лучше, хотя и труднее, вообразить то, о чем идет речь.

Ничего не старайтесь заучить, не нарисовав, не вообразив того, о чем идет речь, не поняв, как это наглядное представление точно выражается в формулировке определения, теоремы или задачи.

Геометрия возникла из практических задач, ее предложения выражают реальные факты и находят многочисленные применения. В конечном счете в основе всей техники так или иначе лежит геометрия, потому что она появляется везде, где нужна малейшая точность в определении формы и размеров. И технику, и инженеру, и рабочему, и архитектору необходимо геометрическое воображение.

Математика, геометрия в частности, представляет собой могущественный инструмент познания природы и создания техники.

Идеальные геометрические понятия возникают в результате отвлечения от всего внешнего и случайного относительно самих пространственных отношений и форм, как таковых, в их собственном виде. Это отвлечение закрепляется в выводах геометрии, которой нужна прочная логическая структура, как нужна прочная структура хорошей машине.

В. И. Ленин писал: «Мышление, восходя от конкретного к абстрактному, не отходит — если оно *правильное*... — *от* истины, а подходит к ней. ...*все* научные (правильные, серьезные, не вздорные) абстракции отражают природу глубже, вернее, *полнее*.» (Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 29, с. 152).

IX класс

ГЛАВА I.

ОСНОВАНИЯ СТЕРЕОМЕТРИИ

§ 1. АКСИОМЫ СТЕРЕОМЕТРИИ

1.1. Аксиома плоскости

Изучение стереометрии мы начинаем с формулировки ее аксиом — тех ее утверждений, которые принимаются без доказательства. Исходя из них, получим выводы стереометрии путем логических рассуждений.

Как уже было сказано во введении, будем считать геометрию на плоскости — планиметрию — известной. Поэтому в стереометрии принимаем как определение: **плоскостями называются фигуры, на которых выполняется планиметрия и для которых верны аксиомы стереометрии.**

Все фигуры, лежащие в плоскости, называются в стереометрии так же, как они назывались в планиметрии: прямые, отрезки, треугольники, окружности и т. д. Простейшими фигурами в пространстве (как и на плоскости) являются точки. Как и в планиметрии, точки обозначают большими буквами латинского алфавита: A, B, C, ... Плоскости обычно обозначают малыми буквами греческого алфавита: α, β, γ, ...

А к с и о м а 1 *(аксиома плоскости).* ***В пространстве существуют плоскости. Через каждые три точки пространства проходит плоскость*** (рис. 5).

Можно представить себе плоскость (точнее, ее часть) как поверхность стола, стены или потолка, ровной площадки на земле.

Может возникнуть вопрос: зачем оговаривать в аксиоме, что в пространстве есть плоскости? Ведь тут же говорится, что через каждые три точки проходит плоскость, а значит, есть плоскости. Однако это соображение верно только в том случае, если в пространстве есть три точки. Поэтому можно не оговаривать существование плоскости, если потребовать, чтобы в пространстве существовали по крайней мере три точки. Более того, говоря «существуют плоскости», мы подчеркиваем, что пространство не исчерпывается одной плоскостью.

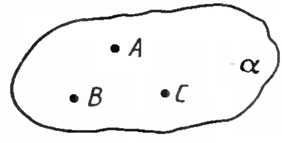


Рис. 5

Вторую часть аксиомы плоскости можно выразить еще и так: *через каждые* *три точки можно провести плоскость* — или так: *любые три точки лежат в одной плоскости.*

Из аксиомы плоскости вытекает, что *множество точек пространства бесконечно* (так как в пространстве есть плоскости, а на каждой плоскости, как известно из планиметрии, множество точек бесконечно).

Поскольку на плоскостях выполняется планиметрия, то на них есть прямые, отрезки, треугольники и другие плоские фигуры со всеми известными из планиметрии свойствами. Вместе с каждой плоскостью и все эти фигуры оказываются фигурами в пространстве. Прямые, как и в планиметрии, обозначаются малыми латинскими буквами: a, b, c, ...

Далее, из аксиомы 1 следует, что *плоскость проходит не только через каждые три точки, но и через одну или две точки.* Докажите это самостоятельно.

Поскольку в пространстве через каждые две точки проходит плоскость, а в плоскости через каждые две точки проходит прямая, то *в пространстве через каждые две точки проходит прямая.*

1.2. Аксиома пересечения плоскостей. Взаимное расположение двух плоскостей

Напомним, что пересечение двух фигур — это их общая часть.

Аксиома 2 *(аксиома пересечения плоскостей).* ***Если две плоскости имеют общую точку, то их пересечение есть их общая прямая*** (рис. 6).

Сказанное в аксиоме означает, что пересечение двух плоскостей α и β является прямой как на одной, так и на другой плоскости. Например, пересечение двух стен или стены и потолка и т. п.

Две плоскости, имеющие общую точку и тем самым (по аксиоме 2) общую прямую, называются **пересекающимися.** О них говорят: «Две плоскости пересекаются по прямой» или еще проще: «Плоскости пересекаются».

Из аксиомы 2 вытекает, что для взаимного расположения двух плоскостей могут представиться лишь две возможности:

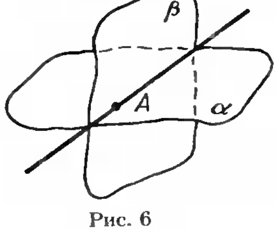


Рис. 6

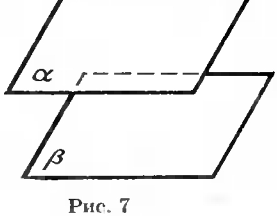


Рис. 7

1. Две плоскости имеют общую точку. Тогда они имеют общую прямую — пересекающиеся плоскости.

2. Две плоскости не имеют общих точек. Такие плоскости называются **параллельными.**

Эти возможности изображены на рисунках 6 и 7. В § 10 будет доказано, что параллельные плоскости существуют.

Используя аксиому 2, находят сечения многогранников плоскостями. **Сечением** фигуры F плоскостью α (в случае, когда они имеют общую точку) мы называем их общую часть, т. е. фигуру, содержащую все их общие точки.

1.3. Аксиома о прямой и плоскости. Взаимное расположение прямой и плоскости

Аксиома 3 *(о прямой и плоскости).* ***Если прямая проходит через две точки данной плоскости, то она лежит в этой плоскости*** (рис. 8).

Другими словами: *если две точки данной прямой принадлежат данной плоскости, то прямая содержится в этой плоскости.*

Из этой аксиомы следует, что *если прямая не лежит в данной плоскости, то она имеет с ней не более одной общей точки,* т. е. лишь одну или вообще не имеет.

Если прямая и плоскость имеют единственную общую точку, то говорят, что они **пересекаются** (рис. 9).

Если прямая и плоскость не имеют общих точек, то они называются **параллельными** (рис. 10).

Итак, для взаимного расположения прямой и плоскости существуют только три случая:

1. Прямая лежит в плоскости.

2. Прямая имеет с плоскостью только одну общую точку — пересекающиеся прямая и плоскость.

3. Прямая не имеет с плоскостью общих точек — параллельные прямая и плоскость.

Отметим, что существование параллельных прямой и плоскости следует из существования параллельных плоскостей. Действительно, любая прямая, лежащая в одной из двух параллельных плоскостей, параллельна другой плоскости, так

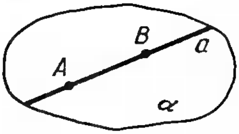


Рис. 8

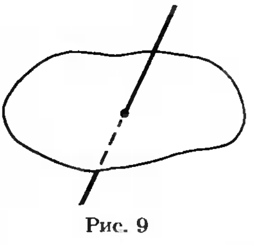


Рис. 9

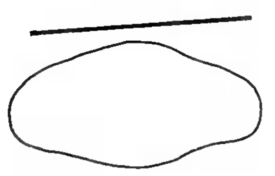


Рис. 10

как не имеет с ней общих точек (рис. 11).

Замечание. Свойством плоскости, выраженным в аксиоме 3, пользуются в практике. Например, когда проверяют, является ли данная поверхность плоской, к ней прикладывают линейку в разных направлениях. Край линейки, прикасаясь к поверхности в двух точках, должен целиком лечь на нее, иначе поверхность не плоская.

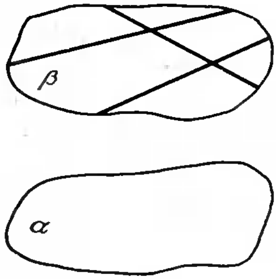


Рис. 11

1.4. Аксиома расстояния. Равенство фигур

Как следует из аксиомы плоскости, через каждые две точки в пространстве проходит плоскость, и даже не одна. На плоскости выполняется планиметрия, и, следовательно, на плоскости между любыми двумя точками есть определенное расстояние — длина соединяющего их отрезка.

Однако две точки принадлежат одновременно разным плоскостям, но расстояние между ними на каждой из этих плоскостей будет одно и то же. Это мы и выразим как аксиому.

Аксиома 4 *(аксиома расстояния)*. ***Расстояние между любыми двумя точками пространства не зависит от того, на какой плоскости, содержащей эти точки, оно измеряется.***

Расстояние между точками A и B будем обозначать либо, так же как отрезок, AB, либо, когда важно подчеркнуть, что речь идет не об отрезке, а о его длине, так: $|AB|$.

Аксиома расстояния позволяет сравнивать фигуры на разных плоскостях, в частности применять теоремы о равенстве и подобии треугольников, расположенных в разных плоскостях.

Пользуясь понятием расстояния, можно определить равенство и подобие фигур в пространстве буквально так же, как это было сделано в планиметрии. Две фигуры F и F' называются **равными**, если можно так сопоставить все их точки, что расстояние между соответствующими точками не меняется. Подробнее: если точкам X, Y фигуры F соответствуют точки X', Y' фигуры F', то $X'Y'=XY$.

1.5. Аксиома разбиения пространства плоскостью

Вспомним, что каждая прямая, лежащая в данной плоскости, делит ее на две полуплоскости, для которых она служит общей границей (рис. 12). Полуплоскость, ограниченная прямой a, характеризуется следующими свойствами:

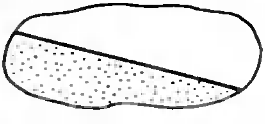


Рис. 12

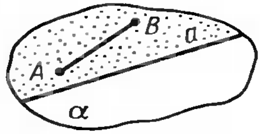


Рис. 13

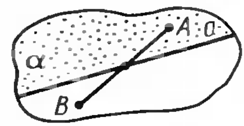


Рис. 14

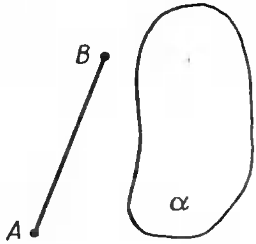


Рис. 15

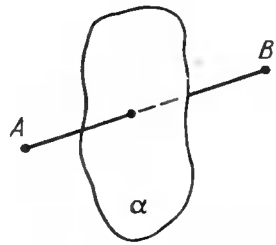


Рис. 16

1) она содержит прямую a, но не совпадает с ней;

2) если точки A, B принадлежат полуплоскости, но не прямой a, то отрезок AB не имеет с a общих точек (рис. 13);

3) если же точка A принадлежит полуплоскости, а B нет, то отрезок AB имеет с прямой a общую точку (рис. 14).

Аналогично определяется полупространство как часть пространства, ограниченная плоскостью (и содержащая саму эту плоскость). Точнее же полупространство можно определить так:

Полупространством, ограниченным плоскостью α, называется фигура со следующими свойствами:

1) она содержит плоскость α, но не совпадает с ней;

2) если точки A, B принадлежат фигуре, но не плоскости α, то отрезок AB не имеет с α общих точек (рис. 15);

3) если же точка A принадлежит фигуре, а B нет, то отрезок AB имеет с α общую точку (рис. 16).

Плоскость, ограничивающую полупространство, называют также его границей.

Аксиома 5 (*о разбиении пространства плоскостью*). ***Каждая плоскость разбивает пространство на два полупространства.***

О точках полупространства, не лежащих на его граничной плоскости, говорят, что они лежат **внутри полупространства.**

Задачи к § 1

Задачи к п. 1.1—1.3

Основная задача

1.1. Пусть плоскости α и β пересекаются по прямой p, а прямая a лежит в плоскости α. Докажите, что: а) если a пересекает p, то a пересекает β; б) если a пересекает β, то a пересекает p; в) если a параллельна β, то a параллельна p; г) если a параллельна p, то a параллельна β.

* * *

1.2. Приведите пример двух одинаковых поверхностей, которые имеют: а) единственную общую точку; б) ровно 4 общие точки; в) бесконечное множество общих точек, не лежащих на одной прямой; г) бесконечное множество общих точек, не лежащих в одной плоскости.

1.3. Приведите пример двух одинаковых поверхностей, не являющихся плоскостями и имеющих единственную общую прямую.

1.4. Дана некоторая плоскость. Приведите пример неплоской линии, которая имеет с ней: а) ровно одну общую точку; б) ровно 2 общие точки; в) ровно 10 общих точек; г) бесконечное множество общих точек.

1.5. Приведите пример линии, которая пересекает любую плоскость.

1.6. Дана некоторая прямая. Приведите пример такой поверхности, которая с этой прямой имеет: а) ровно одну общую точку; б) ровно 2 общие точки; в) ровно 10 общих точек; г) бесконечное множество общих точек.

1.7. Две плоскости имеют общую прямую a и общую точку A. Из чего следует, что A лежит на прямой a?

1.8. На рисунке 17 четырехугольник $ABCD$ имеет с плоскостью α общую точку D. Прямая, проходящая через точки A и B, пересекает плоскость α в точке K; прямая, проходящая через точки B и C, пересекает плоскость α в точке L. Есть ли ошибка на этом рисунке?

1.9. На рисунке 18 три попарно пересекающиеся прямые пересекают плоскость. Есть ли ошибка на этом рисунке?

1.10. На рисунке 19 прямая, проходящая через точки K и L, пересекает прямую, проходящую через A и B в точке M. Лежит ли точка M в плоскости нижней грани тетраэдра?

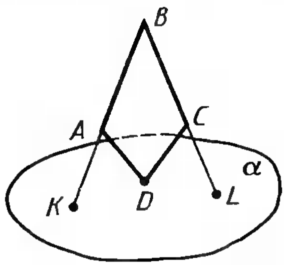


Рис. 17

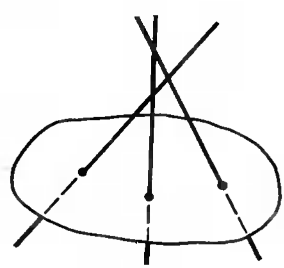


Рис. 18

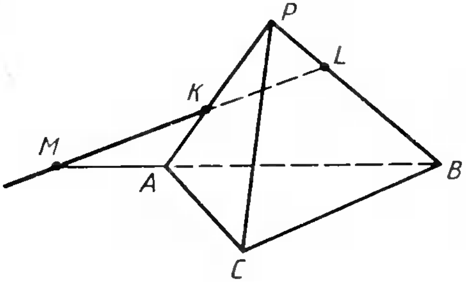


Рис. 19

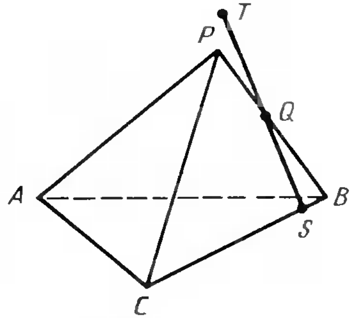


Рис. 20

1.11. На рисунке 20 прямая, проходящая через точки S и Q, пересекает плоскость грани PAC тетраэдра в точке T. Есть ли ошибка на рисунке?

1.12. Ученик нарисовал сечение тетраэдра плоскостью (рис. 21). Есть ли ошибка на рисунке?

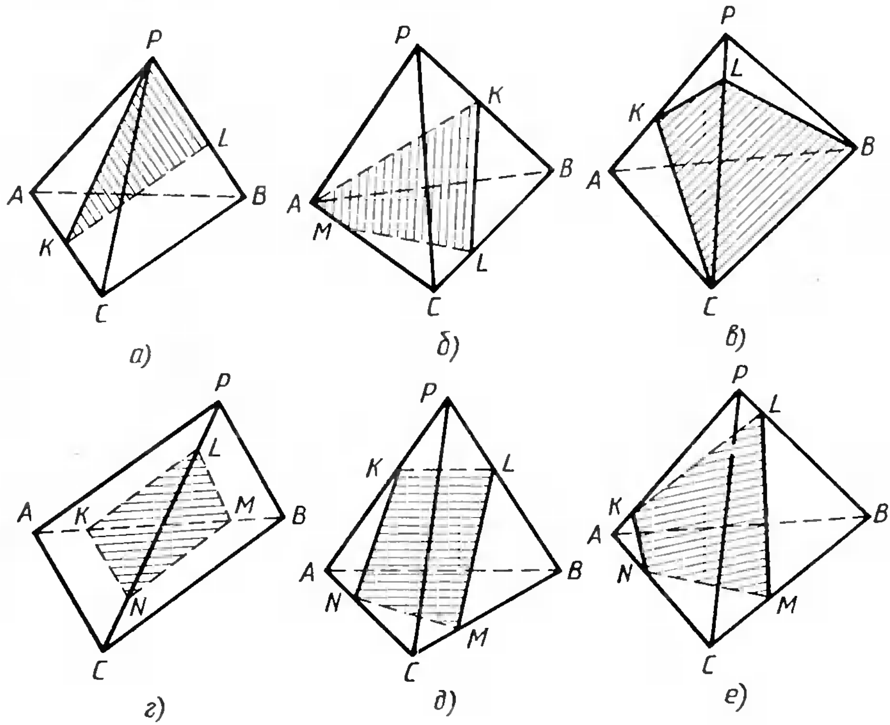


Рис. 21

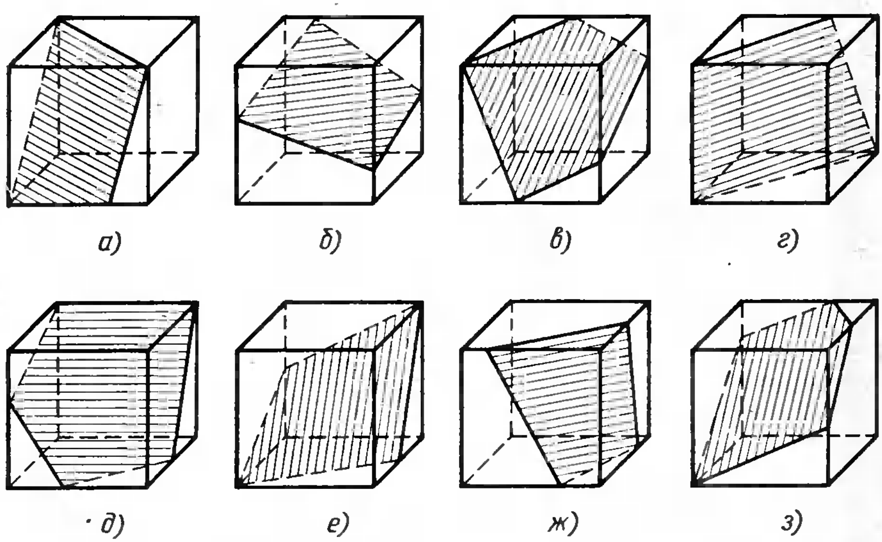


Рис. 22

1.13. Ученик нарисовал сечение куба плоскостью (рис. 22). Есть ли ошибка на рисунке?

Задачи к п. 1.4

1.14. A, B, C — три точки, не лежащие на одной прямой. а) Пусть известны расстояния AB, BC, AC. Как определить вид треугольника ABC по углам? Приведите численные примеры. б) Пусть $|AB|=3$, $|BC|=4$. Каким выбрать расстояние AC, чтобы треугольник ABC был прямоугольным? остроугольным? тупоугольным?

1.15. Пусть $PABC$ — тетраэдр. Сколько пар равных треугольников среди его граней, если: а) $PA=PB=PC$, $AB=BC=CA$; б) $PA=BC$, $PB=AC$, $PC=AB$; в) $PA=PB=$ $=AC$, $PC=AB=BC$?

1.16. Пусть $PABC$ — правильная треугольная пирамида, точка Q — центр ее основания. Точку Q соедините отрезками с точками P, A, B, C. На этом рисунке укажите все пары равных между собой треугольников.

1.17. Докажите, что в правильной треугольной пирамиде равны апофемы (медианы в боковых гранях, проведенные из вершины пирамиды).

1.18. Пусть $PABC$ — правильный тетраэдр. Возьмите любую точку K внутри ребра PB. Докажите, что треугольник AKC равнобедренный. Может ли он быть равносторонним? Может ли он быть прямоугольным?

1.19. Пусть $PABC$ — правильная треугольная пирамида.

В гранях PAC и PBC из точек A и B на ребро PC проведены высоты. Докажите, что они попадут в одну точку ребра.

1.20. Нарисуйте на поверхности куба, но не в одной его грани: а) равнобедренный треугольник; б) равносторонний треугольник; в) разносторонний треугольник.

Задачи к п. 1.5

1.21. Нарисуйте поверхность, отличную от плоскости. Проверьте, будет ли она делить пространство на две части так же, как и плоскость.

1.22. а) Как одной плоскостью разбить тетраэдр на: два тетраэдра; один тетраэдр и один многогранник, не являющийся тетраэдром; два многогранника, не являющиеся тетраэдрами?

б) На сколько частей можно разбить тетраэдр двумя плоскостями? Могут ли все они быть тетраэдрами?

1.23. Нарисуйте куб. а) Как разбить его одной плоскостью на два прямоугольных параллелепипеда? б) На сколько прямоугольных параллелепипедов его можно разбить двумя плоскостями? в) Сколько понадобится плоскостей, чтобы разбить его на одни только тетраэдры?

1.24. Концы ломаной лежат по разные стороны от данной плоскости. Сколько у нее может быть общих точек с плоскостью, если она имеет: а) два звена; б) три звена? Ответьте на те же вопросы, если концы ломаной лежат с одной стороны от плоскости.

§ 2. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

Здесь из принятых нами аксиом стереометрии получим простые следствия, касающиеся прямых и плоскостей. Эти следствия очень важны. Сами по себе они достаточно очевидны. Их доказательства дают пример строгого вывода из аксиом со всеми необходимыми ссылками.

2.1. Прямая, проходящая через две данные точки

Теорема *(о прямой). **Через любые две точки пространства проходит прямая и притом только одна.***

Доказательство. В п. 1.1. уже доказано, что через любые две точки A, B проходит прямая a.

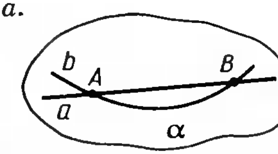


Рис. 23

Докажем, что эта прямая только одна. Прямая a лежит в некоторой плоскости α. Допустим, что, кроме прямой a, через точки A, B проходит еще прямая b (рис. 23). По аксиоме 3 прямая, имеющая с плоскостью две общие точки, лежит в этой плоскости. Так как прямая b имеет с α общие точки A и B, то b лежит в плоскости α.

Но в плоскости α выполняется планиметрия, и, следовательно, через две точки A, B проходит только одна прямая. Значит, прямые a и b совпадают. Таким образом, через точки A и B проходит только одна прямая, что и требовалось доказать.

Из доказанной теоремы следует, что и *в пространстве* (как и на плоскости) *две прямые не могут иметь более одной общей точки.*

Две прямые, имеющие единственную общую точку, называются **пересекающимися.**

Доказав, что в пространстве через каждые две точки проходит единственная прямая, можем задавать прямую в пространстве любой парой ее точек, совершенно не заботясь о том, в какой плоскости эта прямая лежит. Аналогичное верно и для отрезков: каждые две точки в пространстве служат концами единственного отрезка.

Прямая, проходящая через точки A, B, обозначается (AB) или пишется: «Прямая AB». Отрезок с концами A, B обозначается, как и в планиметрии, AB.

Два отрезка пересекаются, если у них есть единственная общая точка внутри их обоих.

2.2. Плоскость, проходящая через три данные точки

Теорема *(о плоскости, проходящей через три точки).* ***Через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость и притом только одна.***

Доказательство. Пусть точки A, B, C не лежат на одной прямой. По аксиоме плоскости через каждые три точки проходит плоскость. Поэтому есть плоскость, проходящая через точки A, B, C, обозначим ее α (рис. 24). Убедимся, что она только одна.

Допустим, что через точки A, B, C проходит еще одна плоскость β, отличная от α. Плоскости α и β имеют общие точки (например, точку A). По аксиоме 2 пересечением плоскостей α и β является их общая прямая. На этой прямой лежат все общие точки плоскостей α и β, а значит, точки A, B, C. Но это противоречит условию теоремы, так как A, B, C не лежат на одной прямой. Итак, через точки A, B, C проходит лишь одна плоскость α. Теорема доказана.

Плоскость, проходящую через три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, обозначают (ABC).

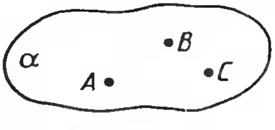


Рис. 24

Доказанную теорему иллюстрирует, например, стол на трех ножках: его крышка лежит на трех ножках.

Из теоремы о плоскости, проходящей через три точки, вытекает

С л е д с т в и е. ***Для каждых двух точек можно подобрать еще две точки так, что все четыре точки не лежат в одной плоскости.***

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть даны две точки A, B. Проведем через них какую-нибудь плоскость α.

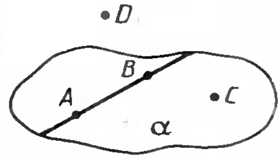


Рис. 25

В плоскости α возьмем какую-нибудь точку C, не лежащую на прямой AB (рис. 25). Как следует из аксиомы 1, существуют точки, не лежащие на плоскости α. Возьмем какую-нибудь такую точку D. Получим точки A, B, C, D, не лежащие в одной плоскости. В плоскости α они не лежат, так как точка D не лежит в α. И в какой-либо другой плоскости β эти точки лежать не могут. Если бы это было так, то разные плоскости α и β имели бы три общие точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, что невозможно. ■

2.3. Плоскость, проходящая через прямую

Т е о р е м а *(о плоскости, проходящей через прямую и точку).* ***Через каждую прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость и притом только одна.***

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть даны прямая a и не лежащая на ней точка A. Возьмем на прямой a две точки B и C (рис. 26). Точка A не лежит с ними на одной прямой, так как через точки B и C проходит лишь одна прямая — это прямая a, а точка A не лежит на ней по условию теоремы.

Через точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, проходит (по предыдущей теореме) единственная плоскость ABC. Прямая a имеет с ней две общие точки B и C и, значит, по аксиоме 3 лежит на ней. Таким образом, плоскость ABC есть искомая плоскость, проходящая через прямую a и точку A. Любая плоскость, проходящая через прямую a и точку A, содержит точки B и C и по теореме п. 2.2 совпадает с плоскостью ABC. Итак, искомая плоскость единственная. ■

Т е о р е м а *(о плоскости, проходящей через пересекающиеся прямые).* ***Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость и притом только одна.***

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть прямые a и b пересекаются в точке A. Возьмем на прямой b другую точку B (рис. 27). По предыдущей теореме через прямую a и точку B проходит

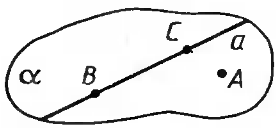


Рис. 26

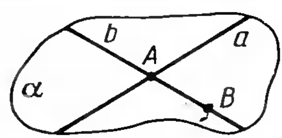


Рис. 27

плоскость α. Согласно аксиоме 3 прямая b лежит в этой плоскости, так как имеет с ней две общие точки A и B. Любая плоскость, проходящая через прямые a и b, содержит точку B и по предыдущей теореме совпадает с α. Итак, искомая плоскость единственная. ■

Доказанные теоремы указывают три способа задания плоскости: 1) тремя точками, не лежащими на одной прямой; 2) прямой и не лежащей на ней точкой; 3) двумя пересекающимися прямыми.

Задачи к § 2

Основные задачи

2.1. Докажите, что через прямую проходит бесконечно много плоскостей.

2.2. Пусть $PABC$ — тетраэдр. Нарисуйте его сечение плоскостью: а) APX, где точка X лежит внутри ребра BC; б) PXY, где точка X лежит внутри ребра AB, а точка Y — внутри ребра AC; в) AXY, где точка X лежит внутри ребра PB, а точка Y — внутри ребра BC; г) XYZ, где точка X лежит внутри AC, точка Y — внутри CB, точка Z — внутри CP; д) XYZ, где точка X лежит внутри ребра PA, точка Y — внутри ребра PC, точка Z — внутри ребра AB; е) XYZ, где точка X лежит внутри ребра PB, точка Y — внутри ребра AC, точка Z — внутри ребра AB; ж) XYZ, где точка X лежит внутри PA, точка Y — внутри PB, точка Z — внутри BC.

2.3. Пусть $PABC$ — правильный тетраэдр с ребром 1. а) Точки K и L — середины ребер PA и BC. Вычислите $|KL|$. б) Точка Q — центр его основания. Вычислите $|PQ|$.

* * *

2.4. Пусть $PABC$ — тетраэдр, X — некоторая точка на ребре AC, Y — некоторая точка на ребре PB. а) При каком положении X на AC прямая PX лежит в (PAB); в (PBC)? б) При каком положении X на AC и Y на PB прямая XY лежит в (PAB); в (PBC); в (PAC); в (ABC)?

2.5. Нарисуйте тетраэдр $PABC$. а) Нарисуйте прямую CX, где X — некоторая точка ребра PA. При каком положении точки X прямая CX лежит в (PBC); в (ABC)? б) Нарисуйте прямую XZ, где X — некоторая точка ребра PA, Z — некоторая точка ребра BC. При каком положении X на ребре PA и Z на ребре BC прямая XZ лежит в (ABC); в (PBC); в (PAB)?

2.6. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, X — некоторая точка ребра A_1B_1, Y — некоторая точка ребра DD_1, K — центр грани CDD_1C_1. Нарисуйте прямую: а) DB_1; б) AK; в) CX; г) BY. При каком положении X прямая CX лежит в плоскости грани куба? При каком положении X на A_1B_1 и Y на DD_1 (XY) лежит в плоскости какой-либо грани куба?

2.7. Нарисуйте два треугольника ABC и ABD, не лежащие в одной плоскости. Внутри отрезков AD и BD возьмите точки K и L. а) Пусть (KL) пересекает (AB) в точке M. Объясните, почему точка M является точкой пересечения (KL) и (ABC). б) Пусть (KL) и (AB) не пересекаются. Объясните, почему в этом случае (KL) и (ABC) не пересекаются.

2.8. Пусть $PABC$ — тетраэдр. Выберите точку K внутри PA, точку L внутри PB, точку M внутри BC так, что (KL) пересекает (ABC), (LM) пересекает (APC). а) Нарисуйте точку D пересечения (KL) и (ABC). б) Нарисуйте прямую, по которой (ABC) пересекает (KLM). в) Нарисуйте точку пересечения (LM) и (APC). г) Нарисуйте прямую, по которой (KLM) пересекает (APC). д) Укажите точку E пересечения (AC) и (KLM). е) Как расположены точки D, E, M? Как вы это объясните?

2.9. Дан правильный тетраэдр $PABC$ с ребром 3. K — середина AC, L — середина PA, M — середина AB, N — некоторая точка на PB. Нарисуйте сечение тетраэдра, проходящее через: а) (PB) и K; б) (KB) и L; в) (KL) и M; г) (AC) и N, причем $|PN| = 1$. Вычислите площади этих сечений.

2.10. Нарисуйте тетраэдр. Установите форму его сечения плоскостью, которая проходит через: а) боковое ребро; б) среднюю линию основания; в) вершину и точку внутри противоположной грани; г) середины противоположных ребер.

§ 3. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ПРЯМЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ

3.1. Три случая взаимного расположения прямых в пространстве

Две прямые на плоскости параллельны или пересекаются — третьей возможности для них нет. В пространстве же к этим двум случаям добавляется еще один — когда две прямые не лежат в одной плоскости. Такие прямые существуют. Возьмем, например, четыре точки A, B, C, D, не лежащие в одной плоскости (рис. 28). Тогда прямые AB и CD не лежат в одной плоскости (так как иначе точки A, B, C, D лежали бы в одной плоскости).

Итак, для взаимного расположения двух прямых в пространстве возможны такие случаи:

1. Прямые лежат в одной плоскости и не имеют общих точек — параллельные прямые (рис. 29, *а*).

2. Прямые лежат в одной плоскости и имеют общую точку — пересекающиеся прямые (рис. 29, *б*).

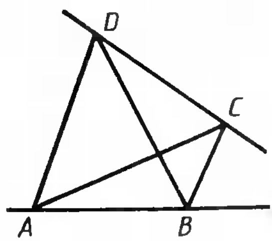


Рис. 28

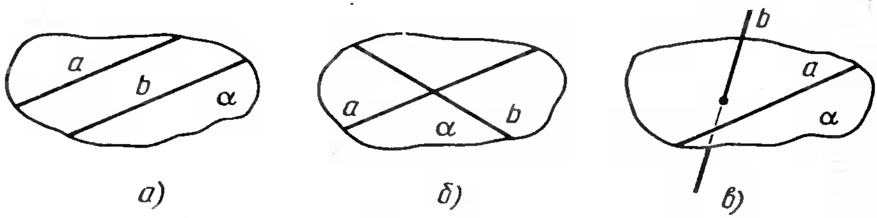


Рис. 29

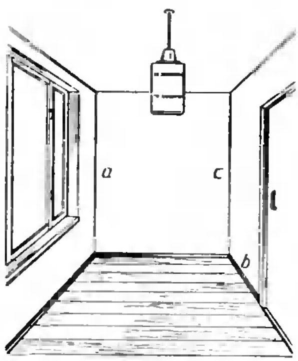


Рис. 30

3. Прямые не лежат в одной плоскости. Такие прямые называются **скрещивающимися** (рис. 29, *в*).

Эти же три случая можно получить иначе.

1. Прямые имеют общую точку. Тогда они лежат в одной плоскости. Это пересекающиеся прямые.

2. Две прямые не имеют общих точек. Тогда они либо параллельны (если лежат в одной плоскости), либо скрещиваются (если эти прямые не лежат в одной плоскости).

Все три случая можно видеть на примере прямых, проходящих по ребрам куба, или на примере прямых, по которым встречаются стены, пол и потолок комнаты (рис. 30; например, a скрещивается с b и параллельна c).

3.2. Параллельные прямые

Для параллельных прямых в пространстве выполняется так же, как на плоскости, следующее утверждение:

Теорема *(основная теорема о параллельных прямых).* ***Через каждую точку, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна.***

Доказательство. Пусть даны прямая a и не лежащая на ней точка A. По теореме п. 2.3 через них проходит плоскость; обозначим ее α. В плоскости α выполняется планиметрия, а потому в ней через точку A проходит прямая b, параллельная a (рис. 31). Докажем, что другой прямой, параллельной a и проходящей через ту же точку A, нет.

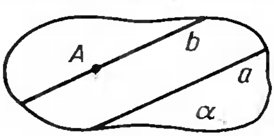


Рис. 31

Действительно, такая прямая по определению параллельных прямых должна лежать с прямой a в одной плоскости. Кроме того, она должна проходить через точку A. Значит, она должна лежать в плоскости, проходящей через прямую a и точку A. Такая плоскость по теореме п. 2.3 только одна — это плоскость α. Но в плоскости, как известно, через данную точку A проходит только одна прямая, параллельная данной прямой a,— это и есть прямая b. Следовательно, в пространстве через данную точку A проходит только одна прямая, параллельная данной прямой a. ■

3.3. Признаки скрещивающихся прямых

Указав в п. 3.1 пример двух скрещивающихся прямых AB и CD, мы фактически воспользовались следующим признаком скрещивающихся прямых:

Если две прямые содержат четыре точки, не лежащие в одной плоскости, то они скрещиваются.

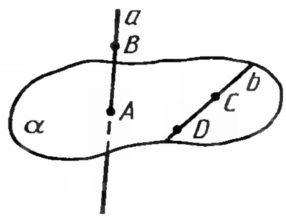


Рис. 32

Отсюда легко выводится второй признак скрещивающихся прямых:

Прямая, пересекающая плоскость, скрещивается со всякой прямой, которая лежит в этой плоскости и не проходит через точку пересечения данной прямой с плоскостью.

Действительно, пусть прямая a пересекает плоскость α в точке A, а прямая b лежит в плоскости α и не проходит через точку A (рис. 32). Возьмем на прямой a еще точку B, а на прямой b — две точки C и D. Четыре точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости, а потому прямые a и b скрещиваются.

Задачи к § 3

Основная задача

3.1. Прямая a лежит в плоскости α, прямая b параллельна прямой a и имеет общую точку с плоскостью α. Докажите, что прямая b лежит в плоскости α.

* * *

3.2. В чем сходство параллельных и скрещивающихся прямых? В чем их различие?

С помощью трех карандашей покажите, как будут располагаться прямые в пространстве в задачах 3.3—3.6.

3.3. Две прямые пересекают третью. Какие возможны случаи взаимного расположения первых двух прямых?

3.4. Две прямые параллельны. Как может быть расположена третья прямая по отношению к одной из них, если она: а) пересекает другую; б) скрещивается с другой?

3.5. Две прямые a и b пересекаются. Третья прямая: а) параллельна прямой a; б) пересекается с прямой a; в) скрещи-

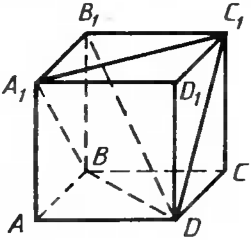


Рис. 33

вается с прямой a. Как она может быть расположена по отношению к прямой b?

3.6. Две прямые a и b скрещиваются. Третья прямая: а) параллельна прямой a; б) пересекается с прямой a; в) скрещивается с прямой a. Как она может быть расположена по отношению к прямой b?

3.7. Раскройте учебник так, чтобы его соседние страницы не оказались в одной плоскости. Выберите на каждой странице не на линии сгиба по точке (скажем, по букве). Как расположена соединяющая их прямая и прямая сгиба? Сделайте рисунок и дайте доказательство.

3.8. Укажите скрещивающиеся ребра: а) тетраэдра; б) куба.

3.9. $PABC$ — тетраэдр. Точка K — середина ребра PA, точка L — середина ребра AB, точка M — середина ребра BC, точка N — середина ребра PC, точка O лежит на ребре PB. Как расположены прямые: а) AP и BC; б) KL и MO; в) KL и BC; г) KN и LO; д) AO и KL; е) KM и CO; ж) NO и LC; з) MO и PC?

3.10. На рисунке 33 укажите скрещивающиеся прямые, проходящие через диагонали граней и диагональ куба.

3.11. Пусть даны два отрезка. Каждая точка одного из них соединяется отрезком с каждой точкой другого. Какая при этом получится фигура, если данные отрезки лежат: а) на параллельных прямых; б) на пересекающихся прямых; в) на скрещивающихся прямых?

3.12. Прямая a параллельна двум прямым b и c, лежащим в плоскости α. Как расположены между собой прямые b и c?

3.13. Две прямые скрещиваются. Через каждую точку одной из них проводится прямая, параллельная другой. Докажите, что все проведенные прямые покрывают плоскость.

3.14. Пусть $PABC$ — правильный тетраэдр. Через точку K — середину PB — провели прямые, параллельные AB и BC. Пусть точки L и M — точки пересечения этих прямых с ребрами тетраэдра. а) Докажите, что $LM \| AC$. б) Как расположены LM и PB? в) Какой вид имеет треугольник KLM? г) Через точку K параллельно PQ, где точка Q — центр основания, проведите прямую. Она встречает основание в точке N. Как вычислить длину KN?

3.15. Два отрезка AB и CD лежат на скрещивающихся прямых. Известны длины этих отрезков, а также расстояния между их концами: $|AC|$, $|AD|$, $|BC|$, $|BD|$. Как вычислить расстояние между серединами отрезков AB и CD? Приведите примеры. Выведите формулу для этого расстояния.

§ 4. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ. ПОСТРОЕНИЯ

4.1. Существование и единственность

Рассмотрим, например, теорему о прямой: «Через любые две точки проходит прямая и притом только одна». В ней содержатся два утверждения: 1) *через любые две данные точки проходит прямая;* 2) *такая прямая только одна.*

Эти утверждения можно выразить несколько иначе: 1) *для каждых двух точек существует проходящая через них прямая (хотя бы одна!);* 2) *для каждых двух точек такая прямая единственная или, другими словами, для каждых двух точек не существует двух проходящих через них прямых.*

Первое — это утверждение о существовании прямой, второе — о ее единственности. Соответственно такие утверждения называются **утверждениями** (теоремами или аксиомами) **существования и единственности.**

Мы разделили теорему о прямой на две: на теорему существования и теорему единственности. Точно так же можно разделить все три теоремы о плоскости (из пп. 2.2, 2.3), а также теорему о параллельных прямых (п. 3.2).

Хотя существование и единственность часто соединяются, как в перечисленных теоремах, они независимы и встречаются и по отдельности. Например, в п. 2.2 доказано: *для каждых двух точек существуют (можно подобрать) еще две такие точки, что все четыре не лежат в одной плоскости.* Это теорема существования, но единственности здесь, очевидно, нет: указанные две точки можно подобрать по-разному. И в аксиоме 1 о плоскости, проходящей через три точки, речь идет лишь о существовании: когда точки лежат на одной прямой, через них проходит много плоскостей. Так и в жизни: если ваш друг говорит, что у него есть книга, то это еще не значит, что она у него лишь одна.

Пример утверждения единственности: *в каждом треугольнике не более одного тупого угла.* Здесь существования может и не быть. Это можно выразить и так: если в треугольнике есть тупой угол, то он только один.

В заключение вернитесь еще раз к аксиомам и теоремам из предыдущих параграфов и выделите в них утверждения существования и утверждения единственности. В связи с этим дайте им другие формулировки. Формулировать одно и то же разными способами полезно, потому что это помогает лучше понять смысл сказанного.

4.2. Построение в пространстве

Сначала вспомним о построениях на плоскости. Указав, например, как строить окружность, описанную около треугольника, мы тем самым доказываем ее существование. Вообще, решая задачу на построение, мы доказываем теорему существования фигуры с заданными в задаче свойствами. Это решение сводится к составлению некоторого алгоритма построения искомой фигуры, т. е. к указанию последовательности выполнения простейших операций, приводящей к необходимому результату. Простейшие операции — это проведение отрезков, окружностей и нахождение точек их пересечения. Затем с помощью чертежных инструментов выполняется непосредственное построение фигуры на бумаге или на доске.

Итак, в планиметрии решение задачи на построение имеет как бы две стороны: теоретическую — алгоритм построения — и практическую — реализацию этого алгоритма, например, циркулем и линейкой.

У стереометрической задачи на построение остается лишь одна сторона — теоретическая, так как нет инструментов для построения в пространстве, аналогичных циркулю и линейке.

За основные построения в пространстве принимаются те, которые обеспечиваются аксиомами и теоремами о существовании прямых и плоскостей. Это — проведение прямой через две точки, проведение плоскости (аксиома 1 и теоремы § 2), а также построение прямой пересечения любых двух построенных плоскостей (аксиома 2). Кроме того, мы, естественно, будем считать, что можно выполнять планиметрические построения в уже построенных плоскостях.

Решить задачу на построение в пространстве — это значит указать последовательность основных построений, в результате которых получается нужная фигура. Обычно явно указываются не все основные построения, а делаются ссылки на уже решенные задачи на построение.

Рассмотрим, к примеру, такую задачу.

Задача. *Через данную точку пространства провести (построить) прямую, пересекающую данную прямую и перпендикулярную этой прямой.*

Решение. Пусть в пространстве заданы точка A и прямая a. Возможны два случая.

1. Точка A не лежит на прямой a (рис. 34).

Проведем (по теореме п. 3.2) через точку A и прямую a плоскость α. По известной теореме планиметрии в плоскости α через точку A можно провести единственную прямую b, перпендикулярную прямой a. Итак, мы построили (провели) искомую прямую b: она проходит через A, пересекает a и перпендикулярна прямой a.

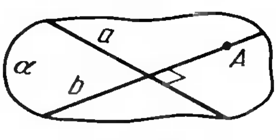


Рис. 34

В рассматриваемом случае решение единственно. Действительно, прямая, удовлетворяющая условию задачи, лежит в единственной плоскости α, проходящей через точку A и прямую a. А в плоскости через данную точку можно провести лишь одну прямую, перпендикулярную данной прямой.

2. Точка A лежит на прямой a (рис. 35).

Через прямую a проходит бесконечно много плоскостей. В каждой из них через точку A можно провести прямую, перпендикулярную прямой a в точке A. Поэтому в данном случае задача имеет бесконечно много решений (будет доказано в п. 6.2, что все эти прямые лежат в одной плоскости и заполняют ее).

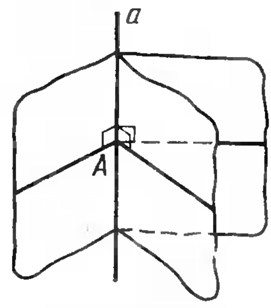


Рис. 35

▲ 4.3. О построении пирамид и призм

Построить пирамиду (а значит, и решить вопрос о ее существовании) можно так.

Строим в какой-нибудь плоскости α какой-либо многоугольник Q — основание пирамиды (рис. 36). Берем любую точку P, не лежащую в плоскости α, и соединяем ее отрезками со всеми вершинами многоугольника. Эти отрезки будут боковыми ребрами пирамиды. Вместе со сторонами многоугольника Q они образуют «каркас» из ребер пирамиды. Но пока еще не построены сами боковые грани. Они получаются так.

Пусть AB — какая-либо сторона многоугольника Q (рис. 37). Через три точки P, A, B проходит плоскость (единственная, так как точки P, A, B не лежат на одной прямой). Отрезки PA, PB, AB лежат в этой плоскости. Они ограничивают треугольник PAB. Он и будет боковой гранью пирамиды. Так строим все боковые грани пирамиды. Вместе с многоугольником Q они ограничат в пространстве пирамиду T с вершиной P и основанием Q (рис. 38).

Тем самым доказана теорема: *какой бы многоугольник Q и*

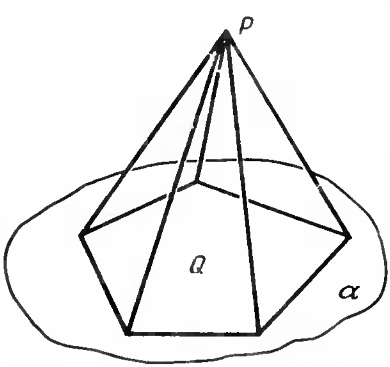


Рис. 36

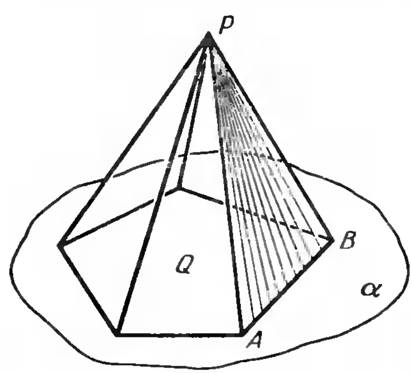


Рис. 37

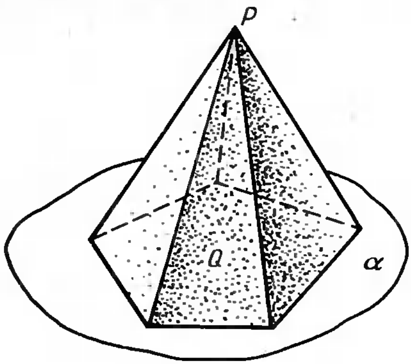


Рис. 38

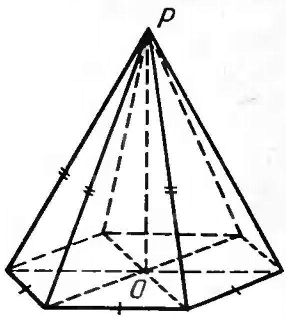


Рис. 39

точку P, не лежащую в его плоскости, ни задать, существует, и притом единственная, пирамида с основанием Q и вершиной P.

Напомним, что пирамида называется правильной, если ее основание — правильный многоугольник, а все ее боковые ребра равны. Поэтому у правильной пирамиды все боковые грани — равные равнобедренные треугольники (рис. 39). Спрашивается: а как построить правильную пирамиду? Где надо взять точку P в проведенном выше построении пирамиды, чтобы она получилась правильной? А может быть, правильную пирамиду построить нельзя, таких пирамид не существует? Однако мы укажем в главе IV, как строить правильные пирамиды точно геометрически и, стало быть, в практике с любой доступной степенью точности.

Перейдем к призмам. n-**угольной призмой** называется многогранник, две грани которого — **основания призмы** — равные n-угольники, а остальные n граней — параллелограммы (рис. 40). Эти параллелограммы называются **боковыми гранями призмы.** Любая боковая грань имеет с каждым основанием по одной общей стороне.

Параллелепипед — это призма, в основании которой параллелограмм (рис. 41). Поэтому все грани параллелепипеда

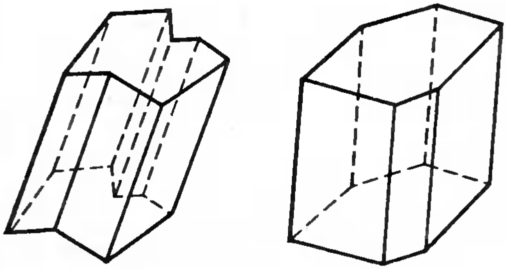


Рис. 40

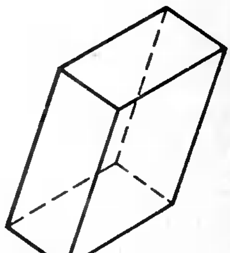


Рис. 41

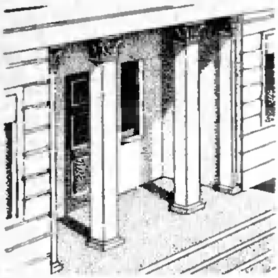


Рис. 42

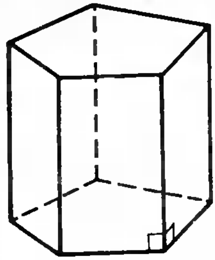


Рис. 43

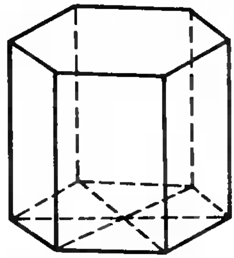


Рис. 44

играют одинаковую роль и любые две его противоположные грани можно считать основаниями. Примерами прямоугольных параллелепипедов могут служить всевозможные коробки, шестиугольных призм — неоточенные карандаши. Форму призм имеют многие столбы и колонны (рис. 42).

Призма называется **прямой,** если все ее боковые грани — прямоугольники (рис. 43). Прямая призма называется **правильной,** если ее основания — правильные многоугольники (рис. 44).

Призму можно построить так. Возьмем в некоторой плоскости α какой-либо n-угольник, например пятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$. Из вершины A_1 проведем какой-нибудь отрезок A_1B_1, не лежащий в плоскости α (рис. 45, *а*). Через точки A_1, A_2, B_1 проходит плоскость (единственная). В ней построим параллелограмм с противоположными сторонами A_1B_1 и A_2B_2.

Далее аналогично построим параллелограмм со сторонами A_2B_2 и A_3B_3 и т. д. (рис. 45, *б*). Продолжая, дойдем до парал-

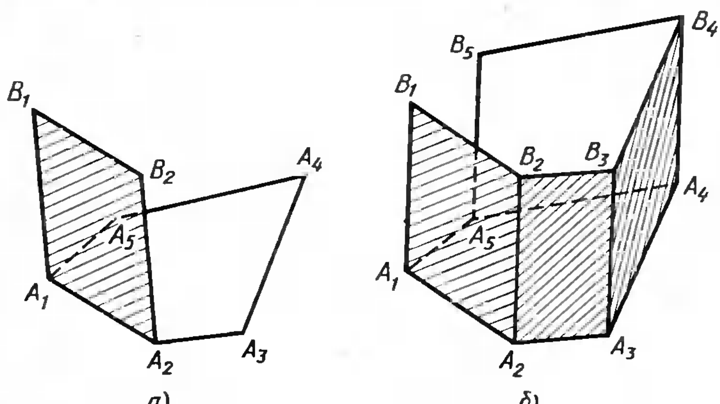


Рис. 45

лелограмма со стороной A_5B_5. Отрезок A_1B_1 уже проведен. Вместе с отрезком A_5B_5 они составят стороны последней, пятой боковой грани. Построенные боковые грани $A_1B_1B_2A_2$, $A_2B_2B_3A_3$, ..., $A_5B_5B_1A_1$ вместе с основаниями — многоугольниками $A_1A_2A_3A_4A_5$ и $B_1B_2B_3B_4B_5$ — ограничат в пространстве призму.

Однако почему отрезки A_5B_5 и A_1B_1 параллельны? Почему не будет хотя бы небольшого «перекоса» — ведь тогда призма не получится?

И еще вопрос: почему все отрезки B_1B_2, B_2B_3, ..., B_5B_1 будут лежать обязательно в одной плоскости?

Дальше мы получим ответы на эти вопросы и докажем, что построение проходит: все отрезки A_1B_1, ... , A_5B_5 параллельны друг другу и отрезки B_1B_2, ... , B_5B_1 лежат в одной плоскости. Поэтому если практическое построение призмы делается достаточно точно (например, ставятся столбы или колонны), то никаких перекосов быть не должно.

4.4. О значении геометрии

Вопросы построения пирамид и призм подводят к общему вопросу о значении идеальных геометрических построений и выводов.

Геометрия имеет громадное практическое значение, появляясь всюду, где нужна хоть малейшая точность в определении формы, размеров и расстояний. Однако каждому понятно, что в природе, в технике нет ни отрезков без всякой ширины, ни бесконечных прямых, ни точек без всяких размеров. Идеальные геометрические фигуры существуют только в нашем мышлении. Так есть ли в них практическая надобность?

Для того чтобы делать точные выводы, точно решать практические задачи, нужны точные правила. А точные общие правила требуют точных общих понятий.

Например, если указано теоретическое построение призмы с данным основанием и боковыми ребрами, то мы уверены в том, что практически такое построение всегда возможно, но только в каждом случае с разной степенью точности, которая зависит от конкретных условий. Если построение не получилось, то причина может быть в том, что либо построение не было выполнено достаточно точно, либо на каком-то этапе была допущена ошибка, но проверять теоретическое правило не нужно: оно установлено в общем виде.

В этом состоит значение математической точности вообще. В практике она недостижима, но она обеспечивает общие точные выводы, которые можно применять. Прочная логическая структура теоретических выводов нужна математике, как нужна прочная структура хорошей машине. Математика, можно сказать, и есть такая машина для решения задач науки и практики. ▼

Задачи к § 4

4.1. Постройте прямую, которая пересекает данную плоскость и проходит через данную точку: а) на плоскости; б) вне плоскости. Какую фигуру заполняют все такие прямые?

4.2. Постройте плоскость, которая пересекает данную плоскость и проходит через данную прямую: а) на плоскости; б) вне плоскости.

4.3. $PABC$ — правильный тетраэдр. Нарисуйте прямую: а) проходящую через точку P перпендикулярно прямой AC; б) проходящую через точку C перпендикулярно прямой PB; в) проходящую через точку K — середину отрезка BC — перпендикулярно BC.

Пусть ребро тетраэдра известно. Как вычислить отрезок этой прямой в тетраэдре в случаях а), б)? Как вычислить наименьший отрезок такой прямой в случае в)?

4.4. $PABCD$ — правильная пирамида. Q — центр ее основания. 1) Нарисуйте прямую, проходящую через P и перпендикулярную: а) (AD); б) (CD); в) (AC); г) (BD); д) (PQ). Как вычислить (задачи а) — г)) длину отрезка прямой в этой пирамиде, если все ее ребра известны? 2) Нарисуйте прямую, проходящую через точку K — середину AD — перпендикулярно (PQ).

ВЫВОДЫ

Изучение стереометрии мы начали с того, что в § 1 определили плоскость как такую фигуру в пространстве, на которой выполняется планиметрия, и сформулировали пять аксиом стереометрии.

Аксиома 1 *(аксиома плоскости).* В пространстве существуют плоскости. Через каждые три точки пространства проходит плоскость.

Аксиома 2 *(аксиома пересечения плоскостей).* Если две плоскости имеют общую точку, то их пересечение есть их общая прямая.

Аксиома 3 *(о прямой и плоскости).* Если прямая проходит через две точки данной плоскости, то она лежит в этой плоскости.

Аксиома 4 *(аксиома расстояния).* Расстояние между любыми двумя точками пространства не зависит от того, на какой плоскости, содержащей эти точки, оно измеряется.

Аксиома 5 *(о разбиении пространства плоскостью).* Каждая плоскость α делит пространство на две части — два полупространства.

В этой главе дана также классификация взаимного расположения: 1) двух плоскостей: две плоскости могут пересекаться по прямой — пересекающиеся плоскости — или не иметь общих точек — параллельные плоскости; 2) прямой и плоскости:

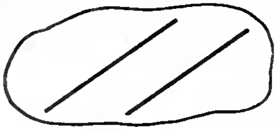


Рис. 46

прямая может лежать в плоскости, пересекать ее (в одной точке) или не иметь с плоскостью общих точек — быть параллельной плоскости; 3) двух прямых: прямые могут лежать в одной плоскости и не иметь общих точек — параллельные прямые, лежать в одной плоскости и иметь единственную общую точку — пересекающиеся прямые и, наконец, не лежать в одной плоскости — скрещивающиеся прямые. Однако нам еще предстоит доказать, что параллельные плоскости существуют.

В § 2 доказано несколько теорем о задании прямой и плоскости в пространстве.

Прямая в пространстве, как и на плоскости, однозначно задается любыми двумя своими точками (теорема п. 2.1). Плоскость в пространстве можно однозначно задать одним из следующих способов: 1) тремя точками, не лежащими на одной прямой (п. 2.2); 2) прямой и не лежащей на ней точкой (п. 2.3); 3) двумя пересекающимися прямыми (п. 2.3); 4) двумя параллельными прямыми (рис. 46).

Наконец, в § 4 говорится о задачах на построение в пространстве как о теоремах существования, доказательство которых имеет алгоритмический характер — сводится к конечному числу основных построений.

Задачи к главе I

1. На плоскости α лежит равносторонний треугольник ABC, сторона которого равна 1. Точка K удалена от точек A и B на расстояние 2. Можете ли вы вычислить расстояние от K до вершины C? Можете ли вы узнать, в каких границах лежит это расстояние?

2. Пусть $PABC$ — правильный тетраэдр с ребром 1. Точка Q — центр его основания, точка K — центр грани PAC, точка L — центр грани PBC, точка M — середина ребра PB. Вычислите расстояние: а) QM; б) QK, в) AL; г) KL.

3. В правильном тетраэдре $PABC$ ребро равно 1. Точка K — середина AC, точка L — середина BC, точка M — середина PB, точка N — середина PA, точка O — середина PC, точка S — середина BA. Вычислите длину общего отрезка двух сечений тетраэдра, если: а) одно из них проходит через KS и P, а другое — через AL и P; б) одно из них проходит через AC и M, а другое — через NO и B; в) одно из них проходит через NO и B, а другое — через LS и P; г) одно из них проходит через NO и B, а другое — через MN и C.

4. В небе остались следы двух реактивных самолетов, летевших по прямым. Вы видите их пересекающимися. Можно ли утверждать, что они на самом деле таковы?

5. а) Постройте прямую, которая перпендикулярна двум скрещивающимся ребрам правильного тетраэдра. б) Как вычислить длину отрезка этой прямой внутри тетраэдра, если его ребро известно? в) Решите аналогичную задачу для правильной треугольной пирамиды.

6. В правильном тетраэдре $PABC$ найдите точку X на ребре PC, такую, что площадь треугольника ABX: а) наибольшая; б) наименьшая. Вычислите эти площади, если ребро тетраэдра равно 1.

7. Два отрезка AB и CD лежат на скрещивающихся прямых. Известны их длины, а также расстояния между их концами: AC, AD, BC, BD. Как вычислить расстояния между их серединами? Приведите численные примеры. Выведите формулу для искомого расстояния. Будет ли верна эта формула, если данные отрезки лежат на пересекающихся прямых? на параллельных прямых? Как обобщить все полученные результаты?

8. Нарисуйте правильную четырехугольную пирамиду. Какую форму имеет ее сечение плоскостью, проходящей через: а) боковое ребро; б) ребро основания; в) ее вершину и центр основания; г) диагональ основания?

9. Нарисуйте правильную треугольную призму. Какую форму имеет ее сечение плоскостью, проходящей через: а) сторону основания; б) боковое ребро; в) диагональ боковой грани; г) середины двух боковых ребер; д) середины двух ребер одного основания; е) середину бокового ребра и середину ребра основания?

10. Нарисуйте куб. Какую форму имеет его сечение плоскостью, проходящей через: а) ребро; б) диагональ грани; в) середины двух соседних ребер одной грани; г) середины двух противоположных ребер одной грани; д) диагональ куба?

11. Можете ли вы указать две наиболее удаленные между собой точки на поверхности таких многогранников: а) правильного тетраэдра; б) правильной четырехугольной пирамиды; в) правильной треугольной призмы; г) прямоугольного параллелепипеда?

ГЛАВА II.

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ И ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ

§ 5. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

5.1. Определение перпендикулярности прямой и плоскости

Представление о прямых или, вернее, об отрезках, перпендикулярных плоскости, дают вертикально стоящие столбы (они перпендикулярны поверхности земли), натянутый шнур, на котором висит лампа (он перпендикулярен потолку).

Ребро угла комнаты перпендикулярно полу (рис. 47). Любая прямая, проведенная на полу из угла, перпендикулярна его ребру. Этим свойством и определяется перпендикулярность прямой и плоскости.

Определение. **Прямая называется перпендикулярной плоскости, если она пересекает эту плоскость и перпендикулярна ко всякой прямой в этой плоскости, проходящей через точку пересечения** (рис. 48).

Говорят также, что **плоскость перпендикулярна прямой** или что они **взаимно перпендикулярны**. Для взаимно перпендикулярных прямой и плоскости применяется обозначение $a \perp \alpha$ или $\alpha \perp a$.

Отрезок или луч перпендикулярен плоскости, если он лежит на прямой, перпендикулярной этой плоскости. Если отрезок перпендикулярен плоскости и его конец лежит в этой плоскости, то он называется **перпендикуляром к данной плоскости.**

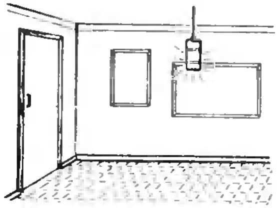


Рис. 47

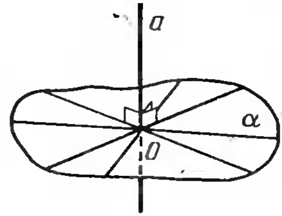


Рис. 48

5.2. Перпендикуляр и наклонная

Отрезок, имеющий с плоскостью одну общую точку — конец отрезка, но не перпендикулярный данной плоскости, называется **наклонной к плоскости.**

Пусть из одной точки A, не лежащей в плоскости α, проведены перпендикуляр AB и наклонная AC (рис. 49). Отрезок BC называется **проекцией наклонной** AC **на плоскость** α.

Перпендикуляр AB *короче наклонной* AC, т. е. $AB<AC$. Действительно, в прямоугольном треугольнике ABC катет AB короче гипотенузы AC. Итак, перпендикуляр короче наклонной, если они проведены из одной точки к одной плоскости.

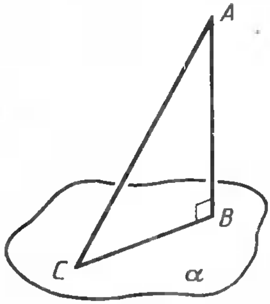


Рис. 49

Можно сказать и по-другому: перпендикуляр AB из точки A на плоскость α — кратчайший из отрезков, соединяющих точку A с точками плоскости α. Свойство перпендикуляра быть кратчайшим отрезком является характерным свойством. А именно справедливо и обратное утверждение: если AB — кратчайший отрезок, идущий из точки A до плоскости α, то AB — перпендикуляр к плоскости.

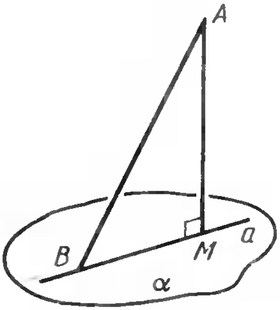


Рис. 50

Докажем это методом от противного. Допустим, что AB не перпендикуляр к α. Тогда через точку B в плоскости α проходит прямая a, не перпендикулярная к AB (рис. 50). Опустим из A перпендикуляр AM на прямую a. В прямоугольном треугольнике ABM катет AM меньше гипотенузы AB : $AM<AB$. Но тогда отрезок AB не будет кратчайшим из всех отрезков, идущих из точки A до плоскости α. Получили противоречие. Следовательно, $AB\perp\alpha$.

Длиной перпендикуляра, опущенного из самой высокой точки предмета на его основание, измеряют высоту предмета. Так, высотой пирамиды называется перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость ее основания, а также его длина (на рисунке 51 это отрезок PO).

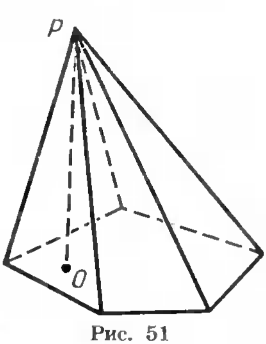


Рис. 51

▲ 5.3. О значении перпендикуляра

Перпендикуляр к плоскости играет очень важную роль и помимо того, что он является кратчайшим среди всех отрезков, идущих от данной точки до точек плоскости.

Важнейшее свойство перпендикуляра состоит в том, что плоскость расположена симметрично относительно него. Что это значит? Все лучи, лежащие в данной плоскости и исходящие из основания перпендикуляра к этой плоскости, образуют с ним равные углы — прямые углы, а для наклонной это не так (рис. 52). При вращении вокруг перпендикуляра плоскость совмещается сама с собой: колесо должно быть насажено на ось так, чтобы его плоскость была перпендикулярна оси. Прямоугольник со стороной, перпендикулярной плоскости, можно вращать вокруг этой стороны, а другая сторона будет скользить по плоскости. Это хорошо видно на правильно навешенной двери. Если ее край не вертикален, дверь не открывается свободно и задевает пол.

Беря примеры из физики, можно отметить, что давление жидкости или газа на стенку сосуда направлено по перпендикуляру к стенке, так же как давление груза на опору направлено по перпендикуляру к ней (рис. 53).

Перпендикуляр к поверхности фигурирует в законах отражения и преломления света. Так, закон отражения гласит: «Луч падающий и луч отраженный расположены в одной плоскости с перпендикуляром к поверхности зеркала в точке падения и образуют с ним равные углы»; угол падения и угол отражения — это углы между указанным перпендикуляром и лучом падающим и лучом отраженным (рис. 54).

Но главное значение перпендикуляра — это его роль в технике и во всей нашей жизни. Мы, можно сказать, окружены перпендикулярами: ножки стола перпендикулярны полу, край шкафа перпендикулярен стене и т. д. Вертикаль перпендикулярна горизонтальной плоскости. Помимо установки мачт, столбов и пр., это играет главную роль в строительстве

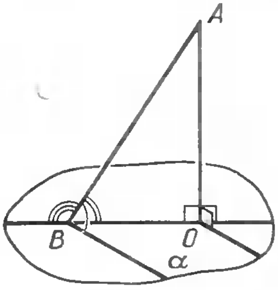


Рис. 52

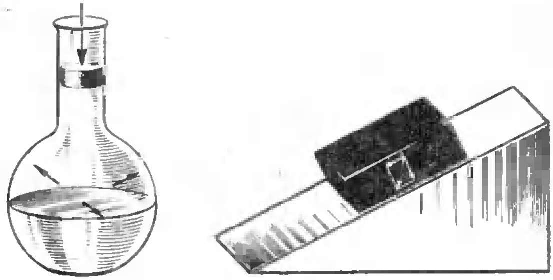


Рис. 53

зданий: междуэтажные перекрытия укладывают перпендикулярно возведенным стенам или столбам каркаса здания. Как мы увидим далее, параллельность плоскостей связана с наличием у них общих перпендикуляров. Вообще перпендикулярность и параллельность прямых и плоскостей — это существенный элемент в строительстве, так что учение о перпендикулярах и параллелях можно назвать основами «строительной геометрии». ▼

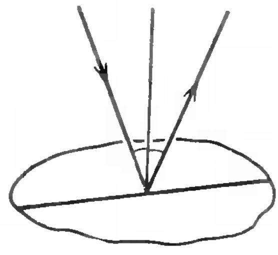


Рис. 54

Задачи к § 5

Основные задачи

5.1. Пусть из точки A к плоскости α проведены перпендикуляр и две равные наклонные. Докажите, что равны: а) проекции этих наклонных; б) углы, которые они образуют с перпендикуляром; в) углы, которые они образуют со своими проекциями. Составьте и проверьте обратные утверждения.

5.2. Пусть $PB \perp (ABC)$, треугольник PAC равнобедренный. а) Пусть $PK \perp AC$. Докажите, что $BK \perp AC$. б) Пусть $BK \perp AC$. Докажите, что $PK \perp AC$.

5.3. В правильном треугольнике ABC точка O — его центр. Пусть PO — прямая, перпендикулярная плоскости ABC, точка X лежит на этой прямой и не совпадает с точкой O. Докажите, что: а) расстояния от X до вершин треугольника равны; б) расстояния от X до сторон треугольника равны; в) $\angle AXO = \angle BXO = \angle CXO$; г) $\angle XAO = \angle XBO = \angle XCO$.

Обобщите эту задачу для случая правильного многоугольника.

* * *

5.4. Пусть AO — перпендикуляр, проведенный из точки A на плоскость α $(O \in \alpha)$. а) Через точку O проведите любой отрезок KL, для которого точка O — середина. Докажите, что $AK = AL$. б) Докажите, что $AK > AL$, если $OK > OL$.

5.5. Пусть отрезок AB перпендикулярен плоскости α, пересекает ее в точке O и делится точкой O пополам. Возьмите любую точку X плоскости α и докажите, что $XA = XB$. Если же $OA > OB$, то докажите, что $XA > XB$.

5.6. Пусть AB — перпендикуляр из точки A на плоскость α, AC — наклонная к плоскости α. а) Известны их длины. Как вычислить длину проекции BC? Как вычислить угол между наклонной и проекцией? б) Известны длина наклонной и угол между наклонной и ее проекцией. Как вычислить длину перпендикуляра и длину проекции? в) Известны длина перпендикуляра и угол между ним и наклонной. Как вычислить длину наклонной и длину проекции?

Приведите численные примеры.

5.7. Пусть AB — перпендикуляр из точки A на плоскость α, AC и AD — две неравные наклонные к этой же плоскости. Докажите, что бо́льшая из них: а) имеет бо́льшую проекцию; б) образует с перпендикуляром больший угол; в) образует со своей проекцией меньший угол.

Проверьте обратные утверждения.

5.8. а) Точка O — центр окружности на плоскости α. Пусть OA — перпендикуляр к α. Докажите, что каждая точка окружности удалена от A на одно и то же расстояние. б) Пусть AB — перпендикуляр из точки A на плоскость α. На какой линии лежат все точки этой плоскости, одинаково удаленные от A?

5.9. 1) В землю вертикально врыт столб. Из некоторой точки на земле он виден под углом φ. Из какой еще точки на земле он виден под тем же углом? Какую фигуру образуют все такие точки? Из каких точек на земле он виден под бо́льшим углом? под меньшим углом? 2) Придумайте разные способы вычисления высоты столба, если: а) можно подойти к нему вплотную; б) можно подойти к нему по прямой на некоторое расстояние; в) можно идти мимо него по прямой.

5.10. В тетраэдре $PABC$ PB — его высота, $AB=BC$. а) Заполните таблицу:

	PB	AB	PA	AC	$\angle ABC$	$\angle APC$
1	1	1			90°	
2	2	1		1		
3	1	1			120°	
4	1		2	2		
5	1		2			90°
6	1			2		90°

б) Выберите сами три из указанных величин, дайте им численное значение и попытайтесь вычислить остальные. в) Установите связь между PA, AB, $\angle ABC$, $\angle APC$. г) Установите связь между AC, PB, $\angle ABC$, $\angle APC$.

Установить связь между величинами — это значит получить формулу, в которую входят только эти величины и какие-нибудь числа, а для углов — их тригонометрические функции.

§ 6. ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

6.1. Основной признак перпендикулярности прямой и плоскости

Большую роль в изучении перпендикулярности прямых и плоскостей играет следующая теорема:

Теорема (*признак перпендикулярности прямой и плоскости*). ***Прямая, перпендикулярная двум пересекающимся прямым, лежащим в данной плоскости, перпендикулярна этой плоскости.***

Пояснение. Понятно значение этой теоремы: достаточно установить (или обеспечить) перпендикулярность прямой только двум пересекающимся прямым в данной плоскости, как она будет перпендикулярна ко всем пересекающим ее прямым, лежащим в этой плоскости.

Вот пример: раскройте книгу и поставьте ее на стол (рис. 55). Корешок книги перпендикулярен краям обложки, лежащим на столе, и тем самым самому столу. Еще пример. Устанавливая вертикальную мачту, достаточно сделать так, чтобы она была перпендикулярна двум прямым, проведенным через ее основание на палубе или на земле. А это можно сделать, натянув из одной точки мачты две пары растяжек равной длины и закрепив их на одинаковых расстояниях от основания мачты на каждой из двух прямых (рис. 56). Так же туристы устанавливают шатровую палатку. Доказательство признака перпендикулярности прямой и плоскости имеет в своей основе это реальное построение.

Рис. 55

Доказательство. Пусть прямая a пересекает плоскость α в точке O и перпендикулярна двум прямым b и c, проходящим в плоскости α через точку O. Нужно доказать, что прямая a перпендикулярна ко всякой прямой, проходящей через точку O в плоскости α. Возьмем любую такую прямую d, отличную от b и c (рис. 57).

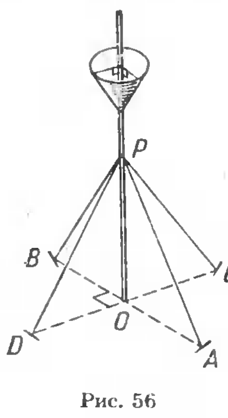


Рис. 56

Выберем на прямых b и c по точке B и C так, чтобы отрезок BC пересекал прямую d в какой-то точке D. Возьмем точки $B_1 \in b$ и $C_1 \in c$ так, чтобы точка O была серединой отрезков BB_1 и CC_1, т. е. чтобы B_1 и C_1 были симметричны точкам B и C относительно точки O в плоскости α. Тогда отрезок B_1C_1, симметричный от-

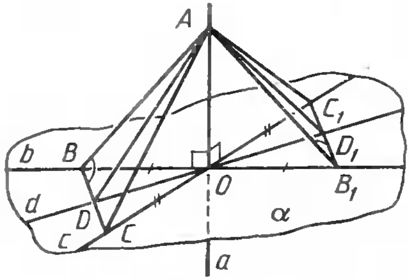


Рис. 57

носительно O отрезку BC, пересечет прямую d в точке D_1, симметричной точке D относительно O (докажите!).

В силу симметричности точек B_1, C_1, D_1 точкам B, C, D имеем равенства:

$$OD=OD_1,\ BC=B_1C_1,$$
$$BD=B_1D_1.$$

Возьмем теперь на прямой a любую точку $A \neq O$ и соединим ее отрезками AB, AC, AD, AB_1, AC_1 и AD_1 с точками B, C, D, B_1, C_1, D_1. Так как $a \perp b$ и $OB=OB_1$, то a является серединным перпендикуляром к отрезку BB_1. Поэтому $AB=$ $=AB_1$. Аналогично $AC=AC_1$. Так как, кроме того, $BC=B_1C_1$, то $\angle ABC=\angle AB_1C_1$, т. е. $\angle ABD=\angle AB_1D_1$. Кроме этих равных углов, в треугольниках ABD и AB_1D_1 имеем $AB=AB_1$ и $BD=B_1D_1$. Следовательно, $\triangle ABD=\triangle AB_1D_1$. Но тогда и $AD=AD_1$.

Итак, точка A равноудалена от концов отрезка DD_1. Так как точка O — середина отрезка DD_1, то прямая a, проходящая через точки A и O, является серединным перпендикуляром к отрезку DD_1 в плоскости ADD_1, т. е. $a \perp d$. Поэтому $a \perp \alpha$. ■

6.2. Плоскость перпендикуляров

Как было доказано в п. 4.2, в пространстве через данную точку A, лежащую на прямой a, проходит бесконечно много прямых, перпендикулярных прямой a (рис. 35). Там же говорилось, что все эти прямые лежат в одной плоскости. Теперь мы можем доказать это утверждение, опираясь на признак перпендикулярности прямой и плоскости.

Теорема (*о плоскости перпендикуляров*). ***Прямые, перпендикулярные данной прямой в данной ее точке, лежат в одной плоскости и покрывают ее.***

Доказательство. Пусть a — данная прямая и A — какая-либо ее точка. Возьмем любые две прямые p и q, проходящие через точку A и перпендикулярные прямой a (рис. 58). Плоскость α, проходящая через прямые p и q, содержит точку A и перпендикулярна прямой a (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости). Поэтому через каждую точку в пло-

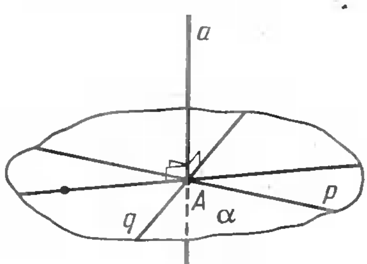


Рис. 58

скости α в ней проходит прямая, перпендикулярная прямой a. Следовательно, плоскость α покрыта прямыми, перпендикулярными к прямой a в точке A. Мы доказали второе утверждение теоремы. Докажем теперь первое.

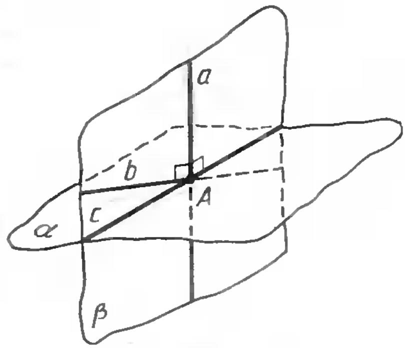


Рис. 59

Допустим, что через точку A проходит прямая b, перпендикулярная прямой a, но не лежащая в плоскости α. Проведем через нее и прямую a плоскость β. Плоскость β пересечет α по некоторой прямой c (рис. 59). И так как $\alpha \perp a$, то $c \perp a$. Получается, что через точку A в плоскости β проходят две прямые b и c, перпендикулярные прямой a. Это невозможно. Значит, прямых, перпендикулярных прямой a в точке A и не лежащих в плоскости α, нет. Все они лежат в этой плоскости и покрывают ее. ■

Итак, мы доказали существование взаимно перпендикулярных прямых и плоскостей.

Пример к теореме о плоскости перпендикуляров дают спицы в колесе, перпендикулярные его оси: при вращении они зачерчивают плоскость (точнее, круг), принимая все положения, перпендикулярные оси вращения.

6.3. Построение взаимно перпендикулярных прямых и плоскостей

Доказывая теорему о плоскости перпендикуляров, мы решили такую задачу на построение: *через данную точку A на данной прямой a провести плоскость, перпендикулярную этой прямой.* Поскольку решением этой задачи может быть лишь плоскость перпендикуляров, то ее решение единственно. Теперь решим другую задачу на построение.

Задача. *Через данную точку на данной плоскости провести прямую, перпендикулярную этой плоскости.*

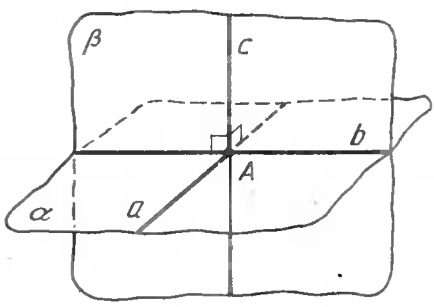


Рис. 60

Решение. Пусть даны плоскость α и точка A в плоскости α. Проведем в плоскости α через A какую-либо прямую a. Через точку A проведем плоскость β, перпендикулярную прямой a,— плоскость перпендикуляров (рис. 60). Плоскость β пересечет плоскость α по некоторой прямой b. Проведем в плоскости β через A прямую c, перпендикулярную прямой b. Так как $c \perp b$ и $c \perp a$ (докажите!), то по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $c \perp \alpha$. Задача решена. Единственность решения этой задачи докажите самостоятельно (методом от противного).

Задачи к § 6

Основные задачи

6.1. Докажите, что диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.

6.2. В правильной пирамиде: а) четырехугольной; б) треугольной — соедините отрезком вершину с центром основания. Докажите, что этот отрезок является высотой пирамиды. Как вычислить его длину, если известны ребра пирамиды? Приведите численный пример. Запишите формулу для вычисления этой высоты через длины рёбер.

6.3. Из точки A, не лежащей в плоскости α, провели перпендикуляр AB к прямой a, лежащей в плоскости α. Через точку B в плоскости α провели прямую BC, перпендикулярную прямой a. Из точки A провели перпендикуляр AD на прямую BC. Докажите, что $AD \perp \alpha$.

* * *

Задачи к п. 6.1

6.4. Укажите прямую, перпендикулярную плоскости ABC на рисунке 61.

6.5. а) Два равнобедренных треугольника имеют общее основание и не лежат в одной плоскости. Докажите, что их общее основание перпендикулярно плоскости, проходящей через оси симметрии этих треугольников. б) Пусть $PABC$ — правильная треугольная пирамида, точка D — середина AC, точка Q — центр основания. Докажите, что $AC \perp (PDQ)$. Обобщите это утверждение.

6.6. Два равнобедренных треугольника ABC $(AB = AC)$ и ADE $(AD = AE)$, не лежащие в одной плоскости, имеют общую медиану, проведенную из вершины A. Докажите, что эта медиана перпендикулярна плоскости, в которой лежат основания BC и DE этих треугольников.

6.7. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, точка K не лежит в его плоскости, $KA = KC$, $KB = KD$, точка O — центр симметрии параллелограмма. Докажите, что $(KO) \perp (ABC)$.

Задачи к п. 6.2, 6.3

6.8. Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма. Нарисуйте ее сечение плоскостью, проходящей через: а) точ-

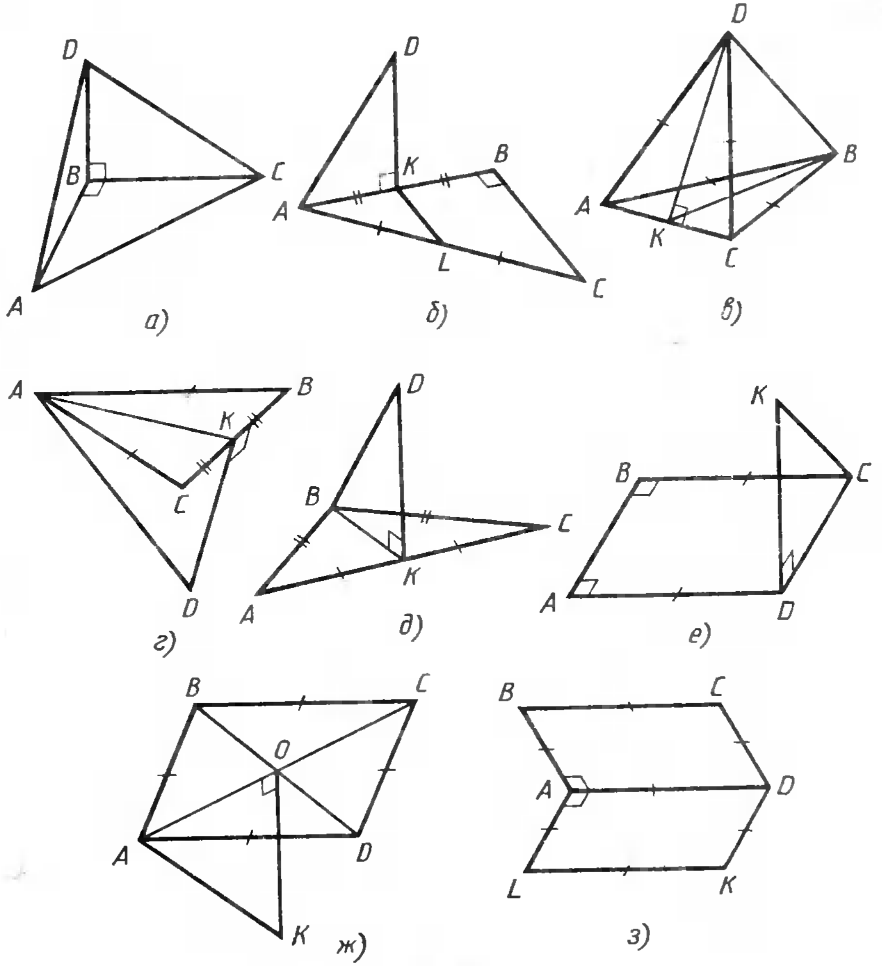


Рис. 61

ку внутри ребра AA_1 и перпендикулярной этому ребру; б) середину ребра AC и перпендикулярной этому ребру.

6.9. Пусть $PABC$ — правильный тетраэдр. Нарисуйте два его сечения: а) плоскостью, проходящей через середину AC и перпендикулярной AC; б) плоскостью, проходящей через другую точку AC и перпендикулярной AC. Какое из всех таких сечений имеет наибольшую площадь? Вычислите ее, если ребро тетраэдра равно 1.

6.10. Нарисуйте сечение, перпендикулярное высоте и проходящее через ее середину для: а) правильной треугольной пирамиды; б) правильной четырехугольной пирамиды. Как вычислить площадь каждого из этих сечений, если известны ребра пирамиды?

6.11. Деревянная балка имеет вид прямоугольного параллелепипеда. Требуется распилить ее перпендикулярно ребру. Как вы разметите поверхность балки?

6.12. Можно ли через одну точку провести четыре попарно перпендикулярные прямые?

§ 7. СВЯЗЬ МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬЮ ПРЯМЫХ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬЮ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Мы постоянно видим, что перпендикуляры к одной и той же плоскости параллельны, а прямые, параллельные перпендикуляру к данной плоскости, сами ей перпендикулярны. Например, вертикальные линии параллельны друг другу и перпендикулярны горизонтальной плоскости. Эти линии могут представляться параллельно стоящими столбами или мачтами, стволами стройных сосен в корабельном лесу, колоннами зданий и т. д. (рис. 62—64). Эта изящная геометрия выражается в теоремах, которые мы сейчас докажем.

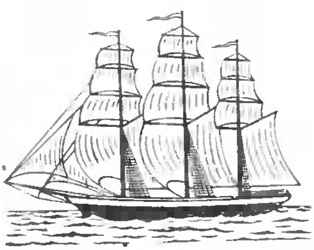


Рис. 62

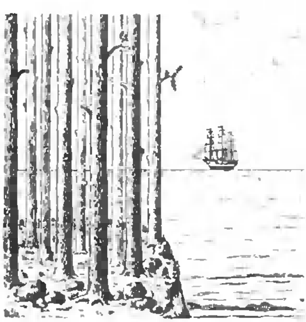


Рис. 63

Рис. 64

7.1. Параллельность прямых, перпендикулярных одной плоскости

Т е о р е м а *(о параллельности перпендикуляров).* ***Две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны.***

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть две прямые a и b перпендикулярны плоскости α и пересекают ее соответственно в точках A и B (рис. 65). Проведем через прямую a и точку B плоскость β и покажем, что прямая b также лежит в плоскости β.

В плоскости α возьмем отрезок MN, перпендикулярный отрезку AB и имеющий точку A своей серединой. Так как $AM=AN$ и $AB\perp MN$, то $BM=BN$.

Возьмем на прямой b любую точку $C\neq B$ и проведем отрезки CA, CM, CN. Поскольку $b\perp\alpha$, то треугольники CBM и CBN прямоугольные. Они равны, так как имеют общий катет CB и равные катеты BM и BN. Поэтому $CM = CN$, т. е. треугольник CMN равнобедренный. Его медиана CA является также его высотой, т. е. $CA \perp MN$.

Итак, три прямые, проходящие через точку A,— AC, AB и a — перпендикулярны прямой MN. По теореме о плоскости перпендикуляров (п. 6.2) они лежат в одной плоскости — плоскости β, которая проходит через прямые AB и a. Следовательно, точка $C \in \beta$, т. е. прямая b лежит в плоскости β (как и прямая a). Но в этой плоскости a и b перпендикулярны одной и той же прямой AB (так как $a \perp \alpha$, $b \perp \alpha$ и прямая AB лежит в α). Поэтому $b \| a$. ■

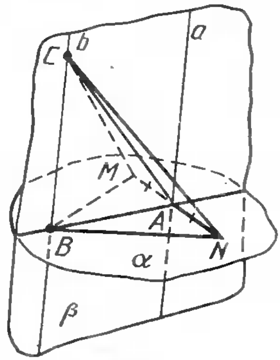


Рис. 65

7.2. Параллель к перпендикуляру

В этом пункте докажем теорему, обратную теореме о параллельности перпендикуляров. Для ее доказательства нам понадобится лемма о параллельных прямых.

Лемма *(о пересечении параллельных прямых с плоскостью).* ***Если одна из двух параллельных прямых пересекает плоскость, то и другая из них пересекает эту плоскость.***

Доказательство. Пусть прямые a и b параллельны и прямая a пересекает плоскость α в точке A (рис. 66). Параллельные прямые a и b лежат в некоторой плоскости β. Плоскости α и β пересекаются по прямой c, так как они имеют общую точку A. В плоскости β прямая c пересекает прямую a в точке A. Поэтому прямая c пересекает в этой плоскости в некоторой точке B и прямую b, параллельную прямой a. Точка B является общей точкой прямой b и плоскости α, так как c лежит в α. Итак, прямая b пересекает плоскость α в точке B. ■

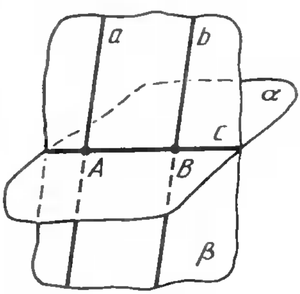


Рис. 66

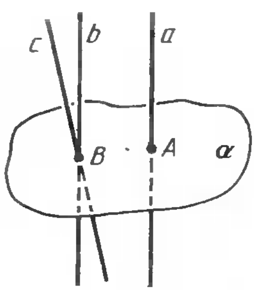


Рис. 67

Теорема *(о параллели к перпендикуляру). **Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая перпендикулярна этой плоскости.***

Доказательство. Пусть две прямые a и b параллельны и $a \perp \alpha$ (рис. 67). Докажем, что $b \perp \alpha$. Допустим противное. Прямая b пересекает плоскость α в некоторой точке B (по лемме этого пункта). Проведем через точку B прямую $c \perp \alpha$ (задача п. 6.3). По теореме о параллельности перпендикуляров $c \parallel a$. Но через точку B проходит лишь одна прямая b, параллельная прямой a. Поэтому $c = b$, и так как $c \perp \alpha$, то $b \perp \alpha$. $\blacksquare$

Теорема о параллели к перпендикуляру является еще одним признаком перпендикулярности прямой и плоскости.

7.3. Две прямые, параллельные третьей прямой

Теоремы о параллельности перпендикуляров и о параллели к перпендикуляру позволяют доказать следующую теорему о параллельных прямых:

Теорема *(о двух прямых, параллельных третьей). **Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны.***

Доказательство. Пусть две прямые a и b параллельны прямой c. Докажем, что они параллельны между собой. Проведем плоскость α, перпендикулярную прямой c (рис. 68). По теореме о параллели к перпендикуляру $a \perp \alpha$ и $b \perp \alpha$. А тогда по теореме о параллельности перпендикуляров $a \parallel b$. $\blacksquare$

Это еще один признак параллельности прямых.

Задачи к § 7

Основная задача

7.1. Докажите такие свойства параллелепипеда: а) для каждого его ребра есть три ему параллельных; б) каждое его сечение, проходящее через два параллельных ребра, является параллелограммом; в) для каждой диагонали его грани найдется ей параллельная и равная диагональ в другой грани; г) прямая, соединяющая центры симметрии его противоположных граней, параллельна его ребру; д) все его диагонали имеют общую точку и этой точкой делятся пополам.

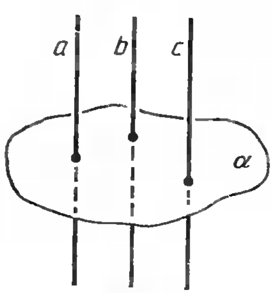


Рис. 68

Задачи к п. 7.1

7.2. Возьмите два равных чертежных угольника. Совместите их гипотенузами так, чтобы они не лежали в одной плоскости. Пусть катет одного из этих угольников вертикален. Объясните, почему не могут быть вертикальными катеты другого угольника.

7.3. Пусть через точки A и B плоскости α проходят две прямые AA_1 и BB_1, перпендикулярные плоскости α. а) Объясните, откуда следует, что расстояние между (BB_1) и (AA_1) равно $|AB|$. б) Какое взаимное расположение могут иметь прямые A_1B_1 и AB? в) Каким по виду может быть четырехугольник AA_1B_1B? г) Пусть $AA_1=BB_1$ и точки A_1 и B_1 лежат с одной стороны от плоскости α. Докажите, что $A_1B_1=AB$. д) Пусть $AA_1=BB_1$ и точки A_1 и B_1 лежат по разные стороны от α. В какой точке отрезка AB прямая A_1B_1 пересекает α?

7.4. В землю врыты вертикально два столба. Известны их длины и расстояние между ними. Как вычислить длину провода, натянутого между ними (без учета провисания)?

7.5. Пусть нужно узнать высоту некоторого объекта, стоящего на земле. Как для этого можно воспользоваться результатом теоремы о параллельности перпендикуляров?

Задачи к п. 7.2

7.6. а) Сторона треугольника перпендикулярна плоскости α. Докажите, что средняя линия, проведенная через середины двух других его сторон, также перпендикулярна плоскости α. б) Плоскость перпендикулярна одной из сторон параллелограмма. Докажите, что она перпендикулярна еще одной его стороне. в) Плоскость перпендикулярна одной из сторон трапеции. Будет ли она перпендикулярна какой-либо другой ее стороне?

7.7. Пусть из точки A проведены к плоскости α перпендикуляр AB и наклонная AC. Нарисуйте перпендикуляр из точки D наклонной AC на плоскость α. Как вычислить его длину, если: а) будут известны длины AB, BC и CD; б) будут известны длины AB, AC, AD? Приведите численные примеры.

7.8. Пусть $ABCD$ и $ABMN$ — два прямоугольника, причем $DA \perp AN$. Нарисуйте перпендикуляры:

а) из точки K, лежащей внутри CD, на (ABM);
б) из точки L, лежащей внутри AM, на (ABC);
в) из точки P, лежащей внутри DN, на (ABM);
г) из точки Q, лежащей внутри DM, на (ABC).

7.9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед. Нарисуйте перпендикуляры: а) из точки K, лежащей внутри AD, на (BCB_1) и на (ABC); б) из точки L, лежащей внутри A_1C_1, на (ABC); в) из точки M, лежащей внутри CD_1, на (ABA_1); г) из точки N, лежащей внутри A_1C, на $(A_1B_1C_1)$ и на (CDD_1).

§ 8. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

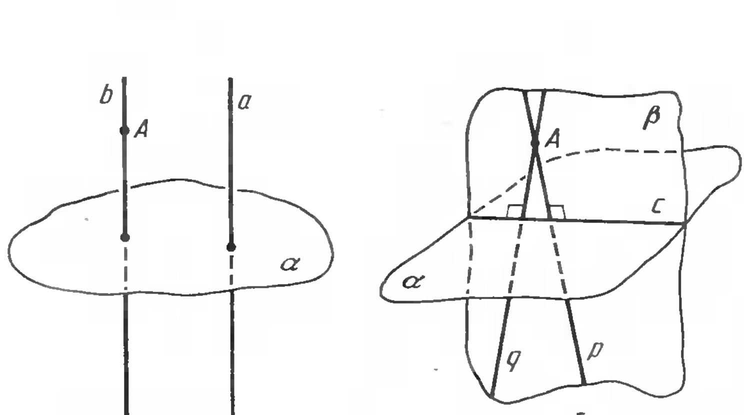
8.1. Теорема о прямой, перпендикулярной плоскости

Теорема о параллели к перпендикуляру позволяет доказать следующую основную теорему о прямой, перпендикулярной плоскости:

Теорема. ***Через каждую точку проходит прямая, перпендикулярная данной плоскости, и притом только одна.***

Доказательство. Пусть даны точка A и плоскость α (рис. 69, *а*). Проведем через какую-либо точку этой плоскости перпендикулярную ей прямую a (задача п. 6.3). Если a проходит через A, то она искомая прямая. Если это не так, то проведем через точку A прямую b, параллельную прямой a. По теореме о параллели к перпендикуляру $b \perp \alpha$. Итак, мы построили прямую, проходящую через точку A и перпендикулярную плоскости α. Докажем, что такая прямая единственная.

Действительно, допустим, что через точку A проходят две прямые p и q, перпендикулярные плоскости α. Проведем через них плоскость β (рис. 69, *б*). Эта плоскость β пересекает плоскость α по некоторой прямой c. Так как $p \perp \alpha$ и $q \perp \alpha$, то прямые p и q перпендикулярны прямой c. Но тогда в плоскости β через точку A проходят две прямые p и q, перпендикулярные прямой c. Из планиметрии известно, что это невозможно. Значит, через точку A проходит лишь одна прямая, перпендикулярная плоскости α. ■



а) б)

Рис. 69

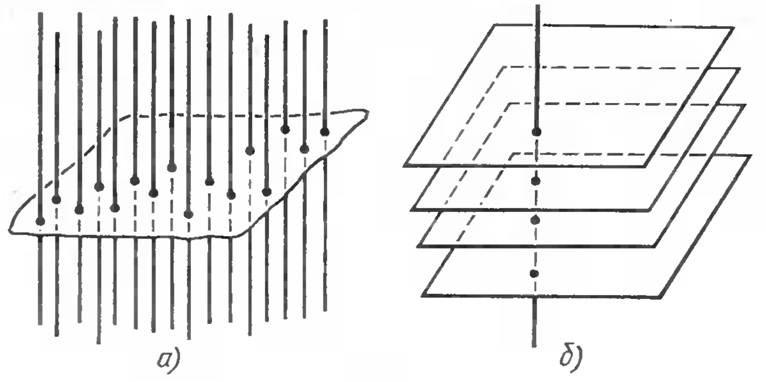


Рис. 70

8.2. Теорема о плоскости, перпендикулярной прямой

Согласно предыдущей теореме все пространство покрыто параллельными друг другу прямыми, перпендикулярными данной плоскости (рис. 70, *а*). Точно так же пространство заполняется параллельными плоскостями, перпендикулярными заданной прямой (рис. 70, *б*). Об этом говорится в следующей теореме, которой мы завершим изучение перпендикулярности прямой и плоскости.

Теорема. ***Через каждую точку проходит плоскость, перпендикулярная данной прямой, и притом только одна.***

Доказательство. Пусть заданы прямая a и точка A. Возможны два случая:

1) Точка A лежит на прямой a (рис. 71, *а*). Этот случай мы уже рассматривали в п. 6.3. Напомним, что плоскостью, проходящей через точку A и перпендикулярной к прямой a, является плоскость перпендикуляров к прямой a в точке A. Такая плоскость единственна.

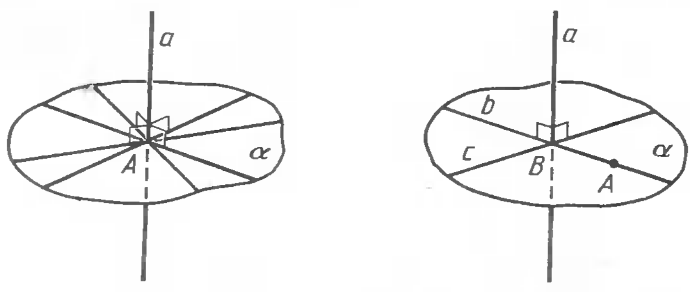


Рис. 71

2) Точка A не лежит на прямой a (рис. 71, б). В этом случае проведем через точку A прямую b, которая пересекает прямую a в некоторой точке B и перпендикулярна прямой a. Через точку B проведем плоскость α, перпендикулярную прямой a. Как плоскость перпендикуляров к a в точке B, плоскость α содержит прямую b. Поэтому α проходит через точку A. Итак, мы построили плоскость α, проходящую через точку A и перпендикулярную прямой a.

Снова такая плоскость единственна, так как этой плоскостью может быть лишь плоскость перпендикуляров к прямой a в точке B.

Теорема полностью доказана.

Задачи к § 8

Основные задачи

8.1. Докажите, что высота правильной пирамиды проходит через центр ее основания.

8.2. Какую фигуру в пространстве образуют все точки, равноудаленные от вершин: а) правильного треугольника; б) любого треугольника; в) правильного многоугольника; г) прямоугольника; д) правильного тетраэдра; е) прямоугольного параллелепипеда?

8.3. Какую фигуру в пространстве образуют все точки, равноудаленные от двух данных точек?

Р е ш е н и е. Искомой фигурой на плоскости является прямая, перпендикулярная отрезку, соединяющему данные точки, и проходящая через его середину. Эту прямую называют серединным перпендикуляром отрезка. Она является осью симметрии двух данных точек.

Перейдем к пространству. В каждой плоскости, проходящей через данные точки A и B, искомой фигурой является ось симметрии отрезка AB. Таких плоскостей бесконечно много, поэтому искомая фигура будет состоять из бесконечного множества всех этих осей симметрии. Можно себе представить, что искомая фигура получена как бы вращением одной из этих осей вокруг (AB).

Таким образом, из соображений наглядности можно предположить, что искомой фигурой является плоскость. Проходит она через середину отрезка AB — назовем ее точкой O — и перпендикулярна отрезку AB (?). Назовем эту плоскость α.

Теперь убедимся в этом, доказав два утверждения:

1. Каждая точка X плоскости α равноудалена от A и B: $XA = XB$.

2. В плоскости α содержатся все точки, равноудаленные от точек A и B. Иначе говоря, если точка Y такова, что $YA = YB$, то она лежит в плоскости α.

Д о к а з а т е л ь с т в о у т в е р ж д е н и я 1. Если $X \in \alpha$,

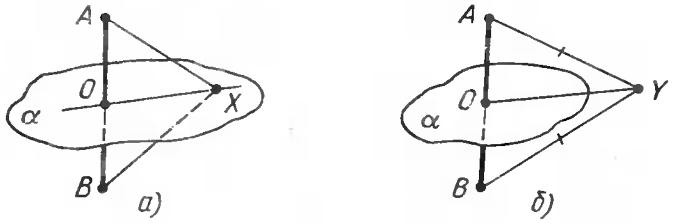


Рис. 72

то X лежит на прямой XO, принадлежащей плоскости α (рис. 72, *а*). Так как $AB \perp \alpha$, то $AB \perp XO$. Получилось, что прямая XO перпендикулярна отрезку AB и проходит через его середину, т. е. является его осью симметрии. Но тогда $XA = XB$.

Доказательство утверждения 2. Пусть точка Y такова, что $YA = YB$. Рассмотрим плоскость AYB (рис. 72, *б*). Так как $YA = YB$, то Y лежит на оси симметрии отрезка AB, находящейся в плоскости AYB. Иными словами, $YO \perp AB$. Мы знаем, что все перпендикуляры, проведенные к данной прямой в данной ее точке, лежат в одной плоскости — той, которая перпендикулярна прямой в этой точке. В нашем случае такой плоскостью и является плоскость α. Значит, (YO) лежит в α. Но тогда и точка Y лежит в плоскости α.

Второе утверждение можно доказать иначе, рассмотрев пересечение плоскости AYB и плоскости α. Попробуйте это сделать самостоятельно.

В планиметрии результат этой задачи понадобился для построения окружности, описанной около многоугольника. Стереометрический вариант этой задачи понадобится нам в дальнейшем курсе, когда мы будем описывать сферу около многогранника.

Задачи к п. 8.1

8.4. Вычислите высоту правильной треугольной пирамиды, у которой: а) каждое ребро равно 1; б) боковое ребро равно 3, а ребро основания равно 2; в) боковое ребро равно 1, а угол при вершине в боковой грани равен 90°; г) боковое ребро равно 1, а угол при вершине в боковой грани равен φ; д) ребро основания равно 2, а угол в боковой грани при этом основании равен φ.

8.5. Пусть высота правильной треугольной пирамиды равна 1. Вычислите: а) боковое ребро, если сторона основания равна 2; б) сторону основания, если боковое ребро равно 2; в) ее ребра, если высота составляет с боковым ребром угол 30°; г) ее ребра, если угол в боковой грани при вершине пирамиды равен φ.

8.6. Вычислите высоту правильной четырехугольной пирамиды, у которой: а) каждое ребро равно 1; б) боковое ребро равно 2, а ребро основания равно 1; в) боковое ребро равно 1, а угол в боковой грани при основании равен $30°$; г) ребро основания равно d, а угол в боковой грани при вершине равен φ.

8.7. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 1. Вычислите: а) ее боковые ребра, если сторона основания равна 1; б) ее сторону основания, если боковое ребро равно 2; в) ее ребра, если боковое ребро составляет со своей проекцией на основание угол $45°$; г) ее ребра, если угол в боковой грани при вершине равен φ.

8.8. Точка P равноудалена от точек A, B, C, и точка Q равноудалена от точек A, B, C. Докажите, что прямая PQ перпендикулярна плоскости ABC.

8.9. Докажите, что диагональ куба перпендикулярна плоскости, проходящей через концы ребер куба, выходящих из той же вершины, что и диагональ.

8.10. Возьмите реальную треугольную пирамиду. Как вычислить ее высоту, делая измерения только на ее поверхности? Приведите пример. Годится ли ваш способ для произвольной пирамиды?

Задачи к п. 8.2

8.11. $PABC$ — правильный тетраэдр. 1) Нарисуйте его сечение плоскостью, проходящей через P и перпендикулярной BC. 2) Нарисуйте его сечение плоскостью, проходящей через C и перпендикулярной PA. 3) Нарисуйте на его поверхности фигуру, каждая точка которой равноудалена от: а) A и B; б) P и C; в) P и Q, где точка Q — центр основания.

8.12. В тетраэдре $PABC$ $PB \perp (ABC)$, $PB = AB = BC = CA$. Нарисуйте на его поверхности фигуру, каждая точка которой равноудалена от: а) A и C; б) B и C; в) A и B; г) P и B.

8.13. Через точку A проведена плоскость α, перпендикулярная прямой a, и прямая b, перпендикулярная той же прямой. Как расположены прямая b и плоскость α?

§ 9. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ

9.1. Определение и признак перпендикулярности плоскостей

Известно, что соседние грани куба или прямоугольного параллелепипеда (например, стены и потолок комнаты) взаимно перпендикулярны (рис. 73). Перпендикулярность соседних граней куба обеспечивается тем, что стороны граней, имеющие общую вершину, во-первых, перпендикулярны их общей стороне и, во-вторых, перпендикулярны друг другу. Этим свойством и определяется перпендикулярность пересекающихся плоскостей в общем случае. В соответствии с ним проверяют перпендикулярность плоскостей угольником.

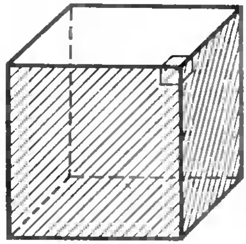


Рис. 73

Пусть две плоскости α и β пересекаются по прямой c (рис. 74, *а*). Возьмем любую их общую точку O. Проведем через O в плоскостях α и β прямые a и b, перпендикулярные к прямой c. Если окажется, что прямые a и b взаимно перпендикулярны, то **плоскости α и β называются взаимно перпендикулярными.** Это обозначается так: $\alpha \perp \beta$.

Заметим, что из трех прямых a, b, c любые две взаимно перпендикулярны. В частности, $b \perp a$ и $b \perp c$. Поэтому $b \perp \alpha$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости). Аналогично $a \perp \beta$.

Определяя перпендикулярность плоскостей α и β, мы выбирали их некоторую общую точку O. Покажем, что, взяв любую другую точку $O_1 \in c$, мы придем к тому же результату. Действительно, проведем через O_1 в плоскостях α и β прямые $a_1 \perp c$ и $b_1 \perp c$ (рис. 74, *б*). Тогда прямые a и a_1 параллельны (как два перпендикуляра к прямой c, лежащие в одной плоскости α). Так как $a_1 \parallel a$ и $a \perp \beta$, то $a_1 \perp \beta$ (по теореме о параллели к перпендикуляру, п. 7.2). Так как b_1 лежит в плоскости β, то $a_1 \perp b_1$.

Мы уже отметили, что в каждой из взаимно перпендикулярных плоскостей α и β лежит перпендикуляр к другой плоскости: например, a лежит в α и $a \perp \beta$. Обратное утверждение является наиболее простым и чаще всего применяющимся признаком перпендикулярности плоскостей.

Теорема *(признак перпендикулярности плоскостей).* ***Если плоскость проходит через перпендикуляр к другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.***

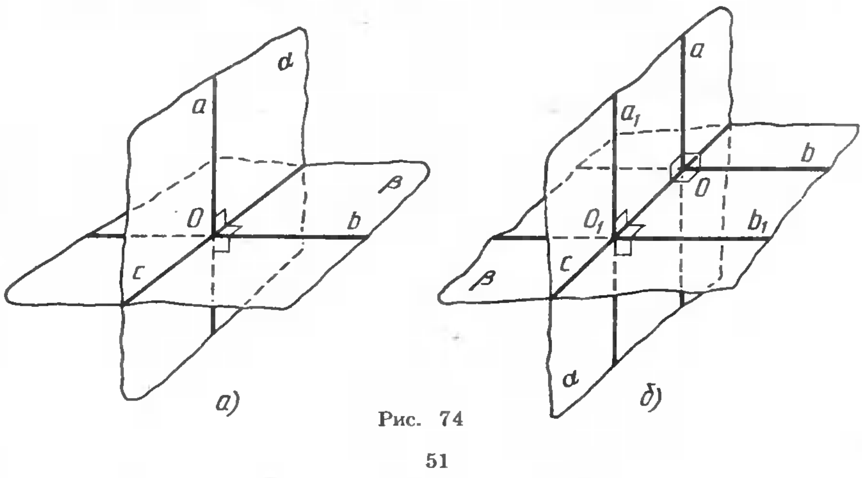


Рис. 74

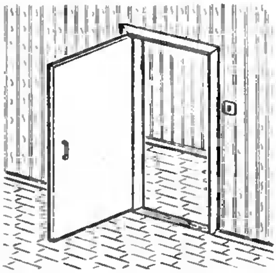


Рис. 75

Доказательство. Пусть плоскость α содержит прямую a, перпендикулярную плоскости β (рис. 74, a). Тогда прямая a пересекает плоскость β в точке O. Точка O лежит на прямой c, по которой пересекаются α и β. Проведем в плоскости β через O прямую $b \perp c$. Так как $a \perp \beta$ и b лежит в плоскости β, то $a \perp b$. Следовательно, $\alpha \perp \beta$, что и требовалось доказать.

Из доказанного признака вытекает существование взаимно перпендикулярных плоскостей.

Данный признак имеет простой практический смысл: плоскость двери, навешенной на перпендикулярный полу косяк, перпендикулярна плоскости пола при всех положениях двери (рис. 75). Другое практическое применение этого признака: когда требуется проверить, вертикально ли установлена плоская поверхность (стена, забор и т. п.), то это делается с помощью отвеса — веревки с грузом. Отвес всегда направлен вертикально и стена стоит вертикально, если в любом ее месте отвес, располагаясь вдоль нее, не отклоняется.

9.2. Свойства взаимно перпендикулярных плоскостей

Докажем два свойства взаимно перпендикулярных плоскостей.

Свойство 1. ***Прямая, лежащая в одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей и перпендикулярная их общей прямой, перпендикулярна другой плоскости.***

Доказательство. Пусть плоскости α и β взаимно перпендикулярны и пересекаются по прямой c. Пусть, далее, прямая a лежит в плоскости α и $a \perp c$ (рис. 74, a). Прямая a пересекает прямую c в некоторой точке O. Проведем через O в плоскости β прямую b, перпендикулярную прямой c. Так как $\alpha \perp \beta$, то $a \perp b$. Поскольку $a \perp b$ и $a \perp c$, то $a \perp \beta$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости. ■

Свойство 2. ***Прямая, имеющая общую точку с одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей и перпендикулярная другой плоскости, лежит в первой из них.***

Доказательство. Пусть плоскости α и β взаимно перпендикулярны, прямая l имеет с плоскостью α общую точку A и $l \perp \beta$ (рис. 76). Покажем, что l лежит в плоскости α. Плоскости α и β пересекаются по прямой c. Проведем в плоскости α через точку A прямую $a \perp c$. По свойству 1 $a \perp \beta$. Так как в пространстве через точку A проходит лишь одна прямая, перпендикулярная плоскости β, то прямая a совпадает

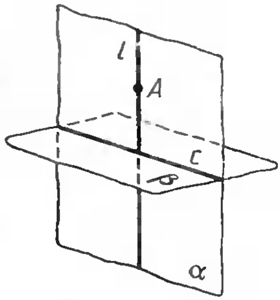


Рис. 76

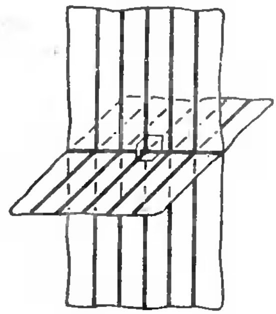


Рис. 77

с прямой l. Следовательно, l лежит в плоскости α, так как a по построению лежит в этой плоскости. ■

Тем самым каждая из двух взаимно перпендикулярных плоскостей покрыта перпендикулярами к другой плоскости (рис. 77).

Задачи к § 9

Задачи к п. 9.1

Основные задачи

9.1. Постройте плоскость, которая перпендикулярна данной плоскости и проходит через данную прямую.

9.2. Какие пары взаимно перпендикулярных плоскостей можно указать: а) в кубе; б) в прямоугольном параллелепипеде; в) в прямоугольном тетраэдре; г) в правильной четырехугольной пирамиде, если плоскости определяются вершинами этих многогранников? (В прямоугольном тетраэдре в вершине сходятся три прямых угла.)

* * *

9.3. Укажите все пары перпендикулярных плоскостей на рисунке 61. Если таковых не окажется, то при каких дополнительных условиях они появятся?

9.4. Треугольники ABC и ABD прямоугольные ($\angle B = 90°$) и лежат в перпендикулярных плоскостях. Докажите, что: а) плоскости ABC и BCD перпендикулярны; б) плоскости ABD и BCD перпендикулярны; в) плоскость ACD не перпендикулярна плоскости этих треугольников.

9.5. Треугольники ABC и ABD равносторонние и лежат в перпендикулярных плоскостях. а) Докажите, что плоскость CDK перпендикулярна плоскости каждого из них, если точка K — середина стороны AB. б) Докажите, что другой такой же плоскости через прямую CD провести нельзя. в) Будут ли перпендикулярны плоскости ACD и BCD? Изменятся ли результаты, если вместо одного из равносторонних треугольников взять равнобедренный с основанием AB?

9.6. Пусть $ABCD$ и $ABKL$ — два квадрата, плоскости которых перпендикулярны. Докажите, что: а) плоскость ADL перпендикулярна плоскости каждого квадрата; б) плоскость BCK перпендикулярна плоскости каждого квадрата; в) $(ADK)\perp(ABK)$; г) $(ALC)\perp(ABC)$; д) $(ADK)\perp(BCL)$; е) $(KLD)\perp(ADL)$. Будут ли перпендикулярны плоскости BDK и ACL?

9.7. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Нарисуйте его сечение плоскостью, которая: а) проходит через точку A и перпендикулярна плоскости ABC; б) проходит через точку A и перпендикулярна плоскости BB_1D; в) проходит через точку A и перпендикулярна плоскости AA_1C; г) проходит через прямую AC_1 и перпендикулярна плоскости $A_1B_1D_1$; д) проходит через прямую AD_1 и перпендикулярна плоскости CDD_1.

9.8. Пусть $PABC$ — правильная пирамида. Нарисуйте ее сечение плоскостью, перпендикулярной основанию и проходящей через: а) ребро AP; б) медиану основания BK; в) PL — высоту (апофему) грани PBC.

9.9. $PABCD$ — правильная четырехугольная пирамида. Нарисуйте ее сечение плоскостью, проходящей через: а) вершину P и перпендикулярной основанию; б) высоту пирамиды PQ и перпендикулярной плоскости CPD; в) ребро PA и перпендикулярной плоскости PBD.

Задачи к п. 9.2

Основные задачи

9.10. Если две пересекающиеся плоскости перпендикулярны третьей плоскости, то прямая их пересечения перпендикулярна третьей плоскости. Докажите.

9.11. Через середины сторон правильного многоугольника проведены плоскости, перпендикулярные этим сторонам. Докажите, что их общая прямая перпендикулярна плоскости многоугольника.

* * *

9.12. ABC_1D_1 и ABC_2D_2 — два квадрата, лежащие во взаимно перпендикулярных плоскостях. а) Докажите, что $AD_1\perp(ABC_2)$; $BC_2\perp(AD_1C_1)$; $BC_1\perp(ABD_2)$. б) Отметьте точку на C_1D_1 и нарисуйте перпендикуляр из нее на плоскость ABC_2. в) Отметьте точку на BD_2 и нарисуйте из нее перпендикуляр на плоскость AC_1D_1.

9.13. ABC и ABD — два равносторонних треугольника, лежащие в перпендикулярных плоскостях, точка K — середина

AB. а) Докажите, что $KC \perp (ABD)$. б) Нарисуйте перпендикуляр из точки D на плоскость ABC. в) Отметьте точку L на AC и нарисуйте перпендикуляр из L на плоскость ABD. г) Нарисуйте перпендикуляр, проходящий через точку B к плоскости ABC. д) Какие точки этих треугольников наиболее удалены друг от друга?

9.14. ABC_1 и ABC_2 — два равных треугольника, лежащие во взаимно перпендикулярных плоскостях. Нарисуйте перпендикуляры из вершин C_1 и C_2 на плоскости другого треугольника, если: а) $\angle C_1 = \angle C_2 = 90°$, $AC_1 = AC_2$; б) $\angle ABC_1 = \angle ABC_2$ — тупой; в) $\angle BAC_1 = \angle BAC_2$ — тупой.

9.15. Вернитесь к задаче 9.12. Какое расстояние больше: а) $|C_1C_2|$ или $|C_1D_2|$; б) $|C_1D_2|$ или $|C_2D_1|$? Чему равно отношение $|C_1C_2|$ к $|O_1O_2|$, где O_1 и O_2 — центры данных квадратов?

9.16. Вернитесь к задаче 9.14. Как, зная длины сторон данных треугольников, вычислить $|C_1C_2|$? Приведите численные примеры.

9.17. Каждые две из трех плоскостей взаимно перпендикулярны. Как расположены по отношению друг к другу прямые пересечения этих плоскостей?

9.18. В четырехугольной пирамиде основанием является прямоугольник. Две соседние боковые ее грани перпендикулярны основанию. Укажите все пары перпендикулярных граней этой пирамиды.

9.19. В четырехугольной пирамиде две грани перпендикулярны основанию. Нарисуйте высоту пирамиды, если основание: а) квадрат; б) прямоугольник; в) ромб; г) равнобедренная трапеция. Рассмотрите два случая: 1) перпендикулярны основанию соседние грани и 2) перпендикулярны основанию противоположные грани. Сколько ребер пирамиды надо знать, чтобы вычислить ее высоту?

§ 10. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ

10.1. Параллельность плоскостей, перпендикулярных одной прямой

Напомним, что две плоскости, не имеющие общих точек, называются параллельными. Из теоремы о плоскости, перпендикулярной прямой (п. 8.2), следует, что *две плоскости, перпендикулярные одной прямой, параллельны* (рис. 78). Действительно, такие плоскости не имеют общей точки. В противном случае через одну точку проходили бы две плоскости, перпендикулярные одной прямой, что невозможно по указанной теореме.

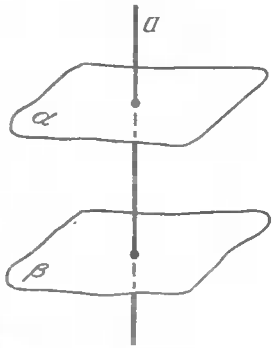


Рис. 78

Доказанный нами признак параллельности плоскостей позволяет построить такие плоскости. Для этого достаточно взять любую прямую и построить две перпендикулярные ей плоскости (п. 8.2).

10.2. Основная теорема о параллельных плоскостях

Подобно тому как в плоскости через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна параллельная ей прямая, так и в пространстве через точку, не лежащую на данной плоскости, проходит только одна (единственная) параллельная ей плоскость.

Для доказательства этой основной теоремы о параллельных плоскостях нам потребуется следующая лемма:

Лемма *(о пересечении параллельных плоскостей третьей плоскостью).* ***Прямые, по которым две параллельные плоскости пересекают третью плоскость, параллельны.***

Доказательство. Пусть параллельные плоскости α и β пересекают плоскость γ по прямым a и b соответственно (рис. 79). Прямые a и b лежат в одной плоскости γ. Они не имеют общих точек, так как плоскости α и β не имеют общих точек. Поэтому прямые a и b параллельны. ■

Теорема *(основная теорема о параллельных плоскостях).* ***Через каждую точку, не лежащую в данной плоскости, проходит плоскость, параллельная данной, и притом только одна.***

Доказательство. Пусть даны плоскость α и не лежащая в ней точка A (рис. 80). Проведем через точку A прямую a, перпендикулярную плоскости α (см. п. 8.1). Через точку A проведем плоскость β, перпендикулярную прямой a (п. 8.2). Плоскости α и β параллельны, так как они перпендикулярны прямой a. Итак, мы доказали существование плоскости, проходящей через точку A и параллельной плоскости α.

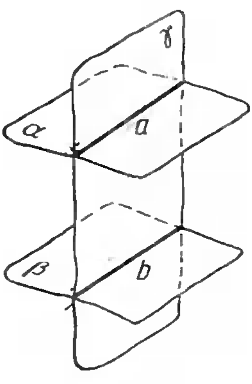


Рис. 79

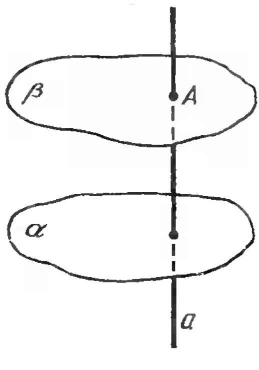


Рис. 80

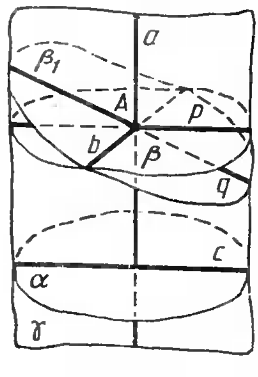


Рис. 81

Докажем единственность такой плоскости. Допустим, что через точку A проходит еще плоскость β_1, параллельная плоскости α и отличная от плоскости β. Плоскости β и β_1 пересекаются по прямой b. Проведем через прямую a любую плоскость γ, пересекающую прямую b (рис. 81). Плоскость γ пересечет плоскости β и β_1 по прямым p и q, проходящим через точку A, а плоскость α — по прямой c. Прямые p и q параллельны прямой c по доказанной нами лемме. Но тогда через точку A проходят две прямые p и q, параллельные прямой c, что невозможно. Поэтому β — единственная плоскость, проходящая через точку A и параллельная плоскости α. ■

Следствие 1. ***Если плоскость пересекает одну из двух параллельных плоскостей, то она пересекает и другую из них.***

Доказательство. В противном случае через одну точку проходили бы две плоскости, параллельные одной и той же плоскости, что невозможно по доказанной теореме. ■

Следствие 2. ***Две плоскости, параллельные третьей плоскости, параллельны.***

Доказательство. Если две плоскости α и β параллельны плоскости γ, то они не имеют общей точки, так как в противном случае через эту точку проходят две плоскости, параллельные γ. ■

Замечание. Обратите внимание на аналогию с параллельными прямыми на плоскости: начиная с определения, большинству доказанных здесь предложений о параллельных плоскостях соответствуют такие же предложения о параллельных прямых на плоскости. Сформулируйте их.

10.3. Прямая, перпендикулярная двум параллельным плоскостям

В этом пункте мы докажем, что прямая, перпендикулярная одной из двух параллельных плоскостей, перпендикулярна и другой из них. Для доказательства этого утверждения нам потребуется следующая лемма:

Лемма *(о прямой, пересекающей параллельные плоскости).* ***Если прямая пересекает одну из двух параллельных плоскостей, то она пересекает и другую из них.***

Доказательство. Пусть плоскости α и β параллельны и прямая c пересекает плоскость α в точке A. Проведем через c любую плоскость γ. Она пересечет плоскости α и β по параллельным прямым a и b. Прямая c лежит в одной плоскости γ с параллельными прямыми a и b и пересекает прямую a (рис. 82). Поэтому c пересечет в точке B и прямую b. Точка B и является точкой пересечения c и β. ■

Теперь докажем теорему, которую можно рассматривать как еще один признак перпендикулярности прямой и плоскости.

Теорема *(о прямой, перпендикулярной параллельным*

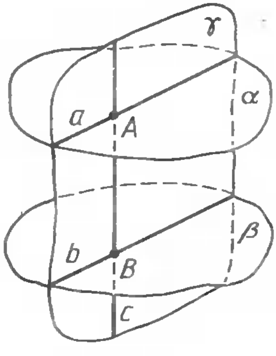


Рис. 82

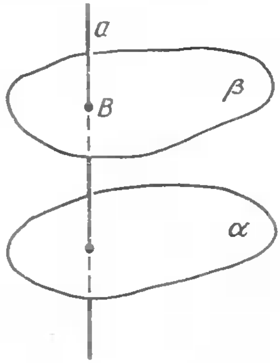


Рис. 83

плоскостям). Прямая, перпендикулярная одной из двух параллельных плоскостей, перпендикулярна и другой из них.

Доказательство. Пусть плоскости α и β параллельны друг другу и прямая a перпендикулярна плоскости α (рис. 83). Значит, a пересекает α, а потому (по доказанной лемме) она пересекает и параллельную ей плоскость β в некоторой точке B. Через точку B проходит плоскость, перпендикулярная прямой a; обозначим ее γ. Плоскости α и γ перпендикулярны прямой a, а потому параллельны. И плоскость β, и плоскость γ проходят через точку B и параллельны плоскости α. Такая плоскость может быть только одна (по основной теореме о параллельных плоскостях). Поэтому плоскости β и γ совпадают. И так как $\gamma \perp a$, то $\beta \perp a$, что и требовалось доказать.

Замечание. Итак, чтобы построить перпендикуляр к данной плоскости, достаточно провести его к плоскости, параллельной данной. На практике, например, когда нужно подпереть потолок или перекрытие, устанавливают столб перпендикулярно полу и тем самым «опускают» перпендикуляр на потолок.

Задачи к § 10

Задачи к п. 10.1

Основная задача

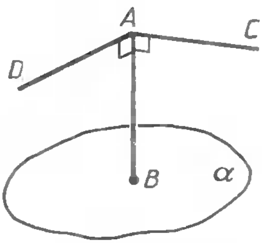


Рис. 84

10.1. Докажите, что параллельны:
а) плоскости противоположных граней прямоугольного параллелепипеда;
б) плоскости оснований прямой призмы.

* * *

10.2. На рисунке 84 прямая AB пер-

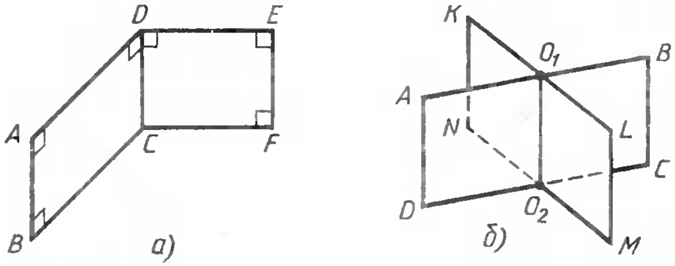


Рис. 85

пендикулярна плоскости α. Докажите, что плоскости CAD и α параллельны.

10.3. а) На рисунке 85, *а* $ABCD$ и $DCFE$ — два прямоугольника в пространстве, не лежащие в одной плоскости. Объясните, почему плоскости ADE и BCF параллельны. б) На рисунке 85, *б* изображены два прямоугольника $ABCD$ и $KLMN$. Отрезок O_1O_2 — их общая ось симметрии. Докажите, что плоскости AKL и DMN параллельны. в) Обобщите задачи а) и б).

10.4. У двух равнобедренных трапеций, не лежащих в одной плоскости, одна и та же ось симметрии. Докажите, что все основания этих трапеций лежат в двух параллельных плоскостях.

10.5. Имеется деревянный брус прямоугольного сечения. Как получить два параллельных его распила?

10.6. Объясните, почему часовая и минутная стрелки часов движутся в параллельных плоскостях.

10.7. Бетонная плита, имеющая форму прямоугольного параллелепипеда, удерживается краном на четырех тросах равной длины. Как закрепить тросы на плите, чтобы она была в горизонтальном положении?

10.8. Планшет укрепили на штативе (навинтили на него). У штатива три одинаковые ноги, образующие равные между собой углы. Объясните, почему планшет при установке на ровной поверхности параллелен земле.

Задачи к п. 10.2

10.9. Будут ли две плоскости параллельны, если: а) они пересекают третью по параллельным прямым; б) каждая плоскость, пересекающая одну из них, пересекает и другую?

10.10. Глядя на рисунок 86, скажите, как расположены плоскости β и γ.

10.11. Глядя на рисунок 87, скажите, как расположены прямые a и b, если известно, что плоскости α и β параллельны.

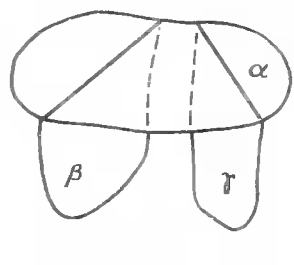


Рис. 86

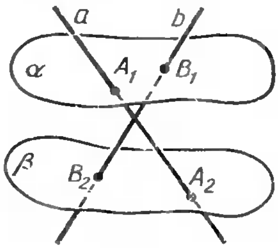


Рис. 87

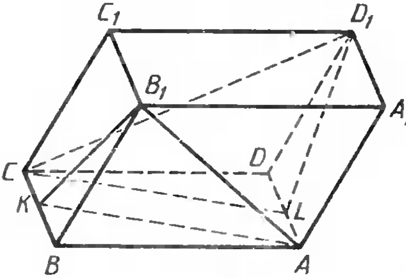


Рис. 88

10.12. Параллельны ли сечения параллелепипеда на рисунке 88?

10.13. Дана правильная пирамида $PABC$. Точка Q — центр ее основания. Нарисуйте сечение ее плоскостью, параллельной плоскости ABC и проходящей через: а) точку T внутри ребра PB; б) точку M внутри грани PAC; в) точку K внутри отрезка PQ.

10.14. Дана правильная пирамида $PABCD$. Точка Q— центр ее основания. Нарисуйте ее сечение плоскостью, параллельной плоскости ABC и проходящей через: а) точку M внутри ребра PA; б) точку N внутри боковой грани; в) точку K внутри отрезка PQ.

10.15. Нарисуйте сечение прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей параллельно плоскости ABC через точку внутри отрезков: а) AA_1; б) CD_1; в) B_1D.

10.16. Какие свойства параллельных плоскостей аналогичны свойствам параллельных прямых?

10.17. Три взаимно перпендикулярных ребра тетраэдра, исходящие из одной вершины, имеют длины 1, 2, 3. Проводятся переменные сечения, параллельные его граням. Вычислите площадь наибольшего из них. (В задачах такого типа предельные положения сечений, в данном случае сами грани, включаются в множество переменных сечений.)

10.18. Пусть плоскости β и γ перпендикулярны плоскости α и прямые, по которым они пересекают α, параллельны. Докажите, что $\beta \parallel \gamma$.

10.19. Ученик сказал: «Если две плоскости перпендикулярны третьей и проходят через параллельные прямые, то они параллельны». Учитель опроверг это утверждение. Как он это сделал?

§ 11. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

11.1. Признак параллельности прямой и плоскости

Напомним, что **прямая и плоскость называются параллельными, если они не имеют общих точек.** Говорят также, что плоскость параллельна прямой или что прямая параллельна плоскости. Для параллельности прямой a и плоскости α применяется обозначение $\alpha \parallel a$ или $a \parallel \alpha$.

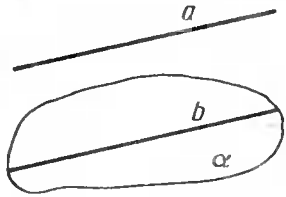


Рис. 89

Существование прямых, параллельных плоскости, очевидно, так как любая прямая, лежащая в одной из двух параллельных плоскостей, не имеет общих точек с другой и потому ей параллельна (рис. 11). Так что через одну точку, не лежащую в данной плоскости, проходит много прямых, параллельных этой плоскости.

Часто параллельность прямой и плоскости устанавливают с помощью следующей теоремы:

Т е о р е м а *(признак параллельности прямой и плоскости).* ***Если прямая параллельна некоторой прямой, лежащей в данной плоскости, но сама не содержится в данной плоскости, то она параллельна этой плоскости.***

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть прямая a параллельна прямой b, лежащей в плоскости α, но не лежит в этой плоскости (рис. 89.) Прямая a не может пересекать плоскость α, так как в этом случае прямые a и b скрещивались бы (по признаку скрещивающихся прямых), а это противоречит условию теоремы. Поэтому $a \parallel b$. ■

11.2. Признак параллельности плоскостей

Параллельность прямых и параллельность плоскостей связывает следующий признак параллельности плоскостей:

Т е о р е м а *(признак параллельности плоскостей).* ***Если две пересекающиеся прямые, лежащие в одной плоскости, соответственно параллельны двум прямым, лежащим в другой плоскости, то эти плоскости параллельны.***

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть даны две плоскости α и β. В плоскости α лежат прямые a и b, а в плоскости β лежат прямые a_1 и b_1 (рис. 90). Пусть, кроме того, $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$, a и b пересекаются в точке O. Прямые a и b параллельны плоскости β (по признаку параллельности прямой и плоскости).

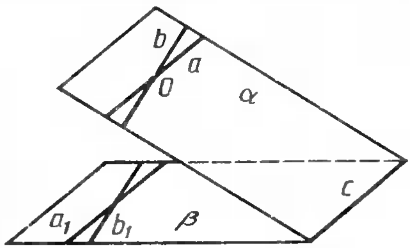


Рис. 90

Допустим, что плоскости α и β пересекаются по прямой c. Тогда прямая a параллельна прямой c. Действительно, во-первых, прямые a и c лежат в одной плоскости α. Во-вторых, a не пересекает c, так как $a \parallel \beta$, а c лежит в β. Аналогично получаем, что $b \parallel c$.

Итак, если допустить, что плоскости α и β пересекаются, то получаем, что через точку O проходят две прямые a и b, параллельные прямой c. А это невозможно. Поэтому плоскости α и β не пересекаются, т. е. $\alpha \| \beta$. ■

Задачи к § 11

Основные задачи

11.1. Докажите следующие признаки параллельности прямой и плоскости (при условии, что прямая не лежит в этой плоскости). Прямая и плоскость параллельны, если: а) существует плоскость, параллельная данной прямой и плоскости; б) существует прямая, параллельная данной прямой и плоскости; в) существует прямая, перпендикулярная данной прямой и плоскости; г) существует плоскость, перпендикулярная данным прямой и плоскости.

11.2. Прямая a параллельна плоскости α и лежит в плоскости β. Плоскости α и β пересекаются по прямой b. Докажите, что прямые a и b параллельны.

11.3. Докажите, что параллельны: а) противоположные грани параллелепипеда; б) основания призмы.

* * *

Задачи к п. 11.1

11.4. Прямая a параллельна плоскости α, а прямая b лежит в α. Каким может быть взаимное расположение прямых a и b?

11.5. Плоскость проходит через сторону прямоугольника. Как она расположена по отношению к его стороне, параллельной данной?

11.6. Дан треугольник ABC. Точка K — середина стороны AB, а точка L — середина стороны BC. Как расположена прямая KL относительно плоскости, проходящей через прямую AC?

11.7. Плоскость проходит ровно через одно ребро прямоугольного параллелепипеда. Как расположены по отношению к этой плоскости прямые, на которых лежат остальные его ребра?

11.8. В тетраэдре $PABC$ через точку K, лежащую внутри ребра AB (рис. 91), проведено сечение, параллельное (AC). Есть ли ошибка на рисунке?

11.9. В тетраэдре $PABC$ через точку K, лежащую внутри ребра PC (рис. 92), проведено сечение, параллельное (PB). Есть ли ошибка на рисунке?

11.10. Даны плоскость α и не лежащая на ней точка A. Сколько можно провести прямых, проходящих через A и параллельных α? Какую фигуру заполняют эти прямые?

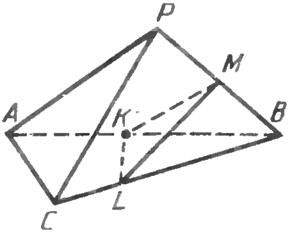


Рис. 91

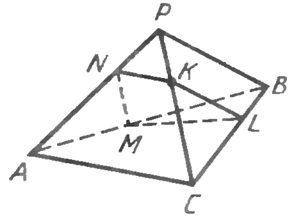


Рис. 92

11.11. Прямые a и b параллельны. Сколько можно провести плоскостей, проходящих через b и параллельных a? Какую фигуру они заполняют?

11.12. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки K, L, M, N — середины ребер B_1C_1, C_1D_1, BC, A_1B_1 соответственно. Будет ли прямая AA_1 параллельна плоскости: а) BCC_1; б) CD_1C_1; в) BDD_1; г) BDC_1; д) KLM; е) CKN; ж) CLN; з) B_1DL?

11.13. В правильном тетраэдре $PABC$ точка Q — центр грани ABC. Нарисуйте сечения тетраэдра, проходящие через Q и параллельные одному его ребру. Какой они могут быть формы? Ответьте на тот же вопрос, если через Q проводить сечения, параллельные двум его ребрам.

11.14. В правильной четырехугольной пирамиде $PABCD$ точка Q — центр основания, точки K и L — середины ребер BC и CD. Установите форму сечения пирамиды плоскостью, проходящей через: а) Q параллельно прямой AD; б) Q параллельно прямой PA; в) ребро CD параллельно ребру AB; г) точки K и L параллельно прямой BD; д) прямую KL параллельно прямым BD и AP.

11.15. Прямая a параллельна плоскости α и пересекает прямую b. Верно ли, что b пересекает α?

11.16. Прямая a параллельна плоскости α и прямой b. Верно ли, что прямая b параллельна плоскости α?

Задачи к п. 11.2

11.17. Пусть прямые OA и O_1A_1 параллельны и прямые OB и O_1B_1 параллельны. Докажите, что плоскости AOB и $A_1O_1B_1$ параллельны.

11.18. Два параллелограмма ABC_1D_1 и ABC_2D_2 не лежат в одной плоскости. Докажите, что плоскости BC_1C_2 и AD_1D_2 параллельны. Обобщите это утверждение.

11.19. Через центр основания правильной треугольной пирамиды $PABC$ (рис. 93) проведена плоскость, параллельная ребрам AB и PC. Есть ли ошибка на рисунке?

11.20. В правильной четырехугольной пирамиде $PABCD$ точка Q — центр основания, точка K — середина ребра PA.

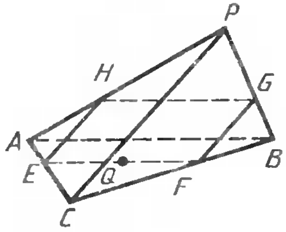


Рис. 93

Нарисуйте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через: а) точку K параллельно прямым CD и PQ; б) точку K параллельно прямым PC и AD.

11.21. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Докажите, что плоскости A_1BD и B_1D_1C параллельны. Укажите аналогичные пары параллельных сечений параллелепипеда.

11.22. В тетраэдре через середины трех боковых ребер провели сечение. Докажите, что оно параллельно основанию. Обобщите задачу. Получили ли мы сечение, параллельное основанию, если провели его через центры тяжести (точки пересечения медиан) боковых граней?

11.23. Две стороны треугольника параллельны плоскости α. Докажите, что и третья сторона параллельна плоскости α.

11.24. Две жерди уложены горизонтально. Всегда ли плоское покрытие, уложенное на них, также горизонтально?

ВЫВОДЫ

1. Учение о перпендикулярности и параллельности — важнейший раздел стереометрии, имеющий огромное как теоретическое, так и практическое значение. Мы уже говорили об этом в п. 5.3. Его можно назвать «строительной геометрией», так как возведение перпендикулярных и параллельных друг другу стен, полов, потолков, перекрытий необходимо в любом строительстве. По существу, изучая эту главу, мы как бы построили здание: сначала возвели перпендикулярные полу столбы (или колонны) — раздел о перпендикулярности прямой и плоскости, затем соединили эти колонны перпендикулярными к полу стенами — раздел о перпендикулярности плоскостей — и накрыли их крышей — параллельные плоскости.

2. Важнейшим в этой главе является понятие перпендикулярности прямой и плоскости. **Прямая называется перпендикулярной плоскости**, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости (п. 5.1).

3. Построение взаимно перпендикулярных прямой и плоскости опирается на следующий признак: *прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости* (п. 6.1).

4. Этот же признак дает возможность доказать два взаимно обратных утверждения, связывающие параллельность прямых и перпендикулярность прямой и плоскости: 1) *две прямые, перпендикулярные одной плоскости, параллельны;* 2) *если из двух параллельных прямых одна перпендикулярна плоскости, то и другая прямая перпендикулярна этой плоскости* (§ 7).

5. Итогом раздела о перпендикулярности прямой и плоскости можно считать две основные теоремы: 1) *через каждую точку проходит одна и только одна плоскость, перпендикулярная данной прямой* (п. 8.1); 2) *через каждую точку проходит одна и только одна прямая, перпендикулярная данной плоскости* (п. 8.2).

6. В § 9 мы изучали **взаимно перпендикулярные плоскости.** Две плоскости называются взаимно перпендикулярными, если пересекающиеся прямые, которые лежат в этих плоскостях и перпендикулярны их общей прямой, взаимно перпендикулярны.

Часто используются два следующих свойства взаимно перпендикулярных плоскостей: 1) *прямая, лежащая в одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей и перпендикулярная их общей прямой, перпендикулярна другой плоскости;* 2) *прямая, имеющая общую точку с одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей и перпендикулярная другой плоскости, лежит в первой из них.*

Был доказан также признак перпендикулярности плоскостей: *если в плоскости лежит хоть одна прямая, перпендикулярная другой плоскости, то эти плоскости взаимно перпендикулярны.*

7. Параллельность прямых и плоскостей была определена еще в главе I: две **плоскости называются параллельными,** если они не имеют общих точек; **прямая и плоскость называются параллельными,** если они не имеют общих точек.

Были доказаны два признака параллельности плоскостей: 1) *две плоскости, перпендикулярные одной прямой, параллельны* (п. 10.1); 2) *если две пересекающиеся прямые, лежащие в одной плоскости, соответственно параллельны двум прямым, лежащим в другой плоскости, то эти плоскости параллельны* (п. 11.2).

Основной теоремой о параллельности является следующая теорема: *через каждую точку, не лежащую в данной плоскости, проходит плоскость, параллельная данной, и притом только одна* (п. 10.2).

Отметим еще простой признак параллельности прямой и плоскости: *если прямая параллельна некоторой прямой, лежащей в данной плоскости, но сама не содержится в данной плоскости, то она параллельна этой плоскости* (п. 11.1).

Задачи к главе II

1. Дан квадрат $ABCD$. Точка X — переменная точка перпендикуляра к его плоскости, проведенного из точки B. а) Пусть сторона квадрата равна d_1, $|XB|=d_2$ Найдите $|XA|$, $|XC|$, $|XD|$. б) Пусть сторона квадрата равна d_1, а $|XA|=d_2$. Найдите $|XD|$. Установите вид треугольника AXD. в) Какая сторона квадрата видна из точки X лучше всего? А какая диагональ?

2. Треугольник ABC равнобедренный с основанием BC. Через вершину A проведена прямая, перпендикулярная его плоскости. Точка X — переменная точка этой прямой. Сравните углы BXC и BAC. Как изменяется угол BXC при удалении точки X от A?

3. Дана правильная треугольная пирамида. Докажите, что: а) через боковое ребро можно провести плоскость, перпендикулярную прямой, проходящей через ребро основания; б) через ребро основания можно провести плоскость, перпендикулярную прямой, проходящей через боковое ребро.

4. Какой фигурой в пространстве является множество точек, равноудаленных от вершин произвольного тетраэдра?

5. Пусть точки A и B лежат в плоскости α, AA_1 и BB_1 — два перпендикуляра к плоскости α с одной стороны от α. а) Установите связь между длинами этих перпендикуляров, $|AB|$ и $|A_1B_1|$. б) Пусть A_1B и B_1A пересекаются в точке K. Из точки K провели перпендикуляр к плоскости α. Как вычислить его длину, зная длины AA_1, BB_1 и AB? Приведите конкретный расчет. в) Найдется ли на прямой AB такая точка, из которой AA_1 и BB_1 видны под равными углами? Найдется ли такая точка вне прямой AB? г) Пусть $|AA_1|=3$, $|BB_1|=4$, точка C лежит на прямой AB, $|CA|=|CB|=5$. Вычислите $|A_1B_1|$. д) Можно ли решить предыдущие задачи, если AA_1 и BB_1 будут лежать по разные стороны от плоскости α?

6. Даны прямая a и плоскость α, не перпендикулярная a. Прямая x движется в пространстве, оставаясь перпендикулярной плоскости α и пересекая прямую a. Докажите, что при своем движении она «заметает» плоскость.

7. В правильном тетраэдре $PABC$ точка Q — центр его основания, точка K — середина ребра PA. Нарисуйте перпендикуляр: а) из P на (ABC); б) из K на (ABC); в) из K на (PCB); г) из Q на (APC); д) из Q на (BKC). Вычислите их длины, если ребро тетраэдра равно 1.

8. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Точка K — середина BB_1, точка L — середина CC_1, точка M — середина A_1B_1, точка N — середина BC. Нарисуйте перпендикуляр: а) из A на (BB_1D_1); б) из A_1 на (AB_1D_1); в) из D_1 на (AB_1C); г) из K на (CDD_1); д) из L на (BDB_1); е) из M на (AB_1D_1); ж) из N на (BDB_1); з) из N на (DA_1B_1); и) из N на (A_1C_1B). Вычислите их длины, если ребро куба равно 1.

9. а) Даны два параллелограмма ABB_1A_1 и ACC_1A_1. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны. б) Через вершины треугольника ABC провели параллельные прямые, пересекающие его плоскость. С одной стороны от его плоскости на этих прямых отложили равные отрезки AA_1, BB_1, CC_1. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны. в) Обобщите задачу б).

10. Через центры двух граней правильного тетраэдра прове-

дены прямые, перпендикулярные этим граням. Каково взаимное расположение этих прямых? Возьмите еще одну такую же прямую. Как она будет расположена по отношению к первым двум? Изменится ли ваш результат, если вместо правильного тетраэдра взять правильную пирамиду, а центры граней заменить на центры описанных около них окружностей?

11. Точка A лежит в плоскости α. На этой плоскости взяли прямую a, не проходящую через A, и провели к ней перпендикуляр AB. Из точки B к прямой a провели другую перпендикулярную прямую BC. Из точки A в плоскости ABC провели $(AD) \perp (AB)$. Докажите, что $(AD) \perp \alpha$. Используя это построение, объясните, как можно опустить перпендикуляр из точки на плоскость.

12. Из точки O — центра квадрата $ABCD$ — провели перпендикуляр OO_1 на плоскость α. Через вершины квадрата провели отрезки, параллельные OO_1, до плоскости α. а) Докажите, что если три из них равны, то все четыре равны. б) Пусть известны сторона квадрата, длина OO_1 и длины двух из проведенных отрезков. Можете ли вы найти длины остальных? в) Пусть известны сторона квадрата и длина OO_1. В каких границах лежит длина наибольшего из проведенных отрезков? наименьшего из них?

13. Докажите, что: а) основание правильной треугольной пирамиды перпендикулярно плоскости, проходящей через боковое ребро и середину противоположного ребра основания; б) плоскость, проходящая через два противоположных боковых ребра правильной четырехугольной пирамиды, перпендикулярна основанию этой пирамиды и другой такой же плоскости в этой пирамиде; в) основание правильной треугольной призмы перпендикулярно плоскости, проходящей через ее боковое ребро и середину противоположного ему ребра в основании призмы. Как можно обобщить эти задачи?

14. В правильной четырехугольной пирамиде со стороной основания d и углом при вершине φ через центр основания проведена плоскость, параллельная боковой грани. Найдите периметр и площадь полученного сечения. В каких границах они находятся при изменении φ?

15. В правильной пирамиде $PABC$ рассматриваются сечения, параллельные (PKL), где точка K — середина ребра AB, точка L — середина ребра BC. Какое из них имеет наибольшую площадь? Чему она равна в пирамиде, у которой все ребра равны 1?

16. Плоскости α_1 и α_2 параллельны, плоскости β_1 и β_2 параллельны, плоскости α_1 и β_1 пересекаются по прямой a, плоскости α_2 и β_2 пересекаются по прямой b. Как расположены прямые a и b?

17. Докажите, что две плоскости параллельны тогда и только тогда, когда параллельны перпендикулярные к ним прямые.

18. Пусть $a \parallel b$, $a \parallel \alpha$, b имеет с плоскостью α общую точку. Докажите, что прямая b лежит в плоскости α.

19. Прямые a и b скрещиваются. Постройте плоскость: а) проходящую через одну из них и параллельную другой; б) параллельную каждой из них; в) параллельную одной и пересекающую другую.

20. Как в сечении куба получить: а) трапецию; б) прямоугольник; в) квадрат? Можно ли в сечении куба получить правильный пятиугольник?

21. Какой фигурой является сечение правильного тетраэдра, параллельное двум его скрещивающимся ребрам? Когда ее площадь достигает наибольшего значения? А периметр?

22. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Нарисуйте его сечение плоскостью KLM при таком расположении точек K, L и M: а) K лежит внутри ребра A_1D_1, L лежит внутри ребра A_1B_1, M лежит внутри ребра AD; б) K лежит внутри ребра A_1B_1, L лежит внутри ребра A_1D_1, M лежит внутри ребра D; в) K лежит внутри ребра A_1B_1, L лежит внутри ребра A_1D_1, M лежит внутри ребра DD_1; г) K лежит внутри ребра A_1B_1, L лежит внутри ребра A_1D_1, M лежит внутри ребра CC_1; д) K лежит внутри ребра A_1B_1, L лежит внутри ребра DD_1, M лежит внутри ребра BC.

23. Дан правильный тетраэдр. Проводится сечение его плоскостью, перпендикулярной отрезку, соединяющему середины его противоположных ребер. а) Докажите, что такое сечение является прямоугольником. б) Может ли оно быть квадратом? в) Будут ли верны результаты, полученные в пунктах а) и б) для правильной треугольной пирамиды? г) В каких границах находится площадь такого сечения в правильном тетраэдре с ребром 1?

24. Докажите такие признаки перпендикулярности двух плоскостей: а) если плоскость параллельна перпендикуляру к другой плоскости, то она перпендикулярна плоскости; б) если плоскость перпендикулярна одной из параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и другой.

ГЛАВА III.

ПРОЕКЦИИ. РАССТОЯНИЯ И УГЛЫ. СФЕРА И ШАР

§ 12. ПРОЕКТИРОВАНИЕ

12.1. Ортогональное проектирование

Проектирование постоянно встречается как в математике, так и в жизни: оно применяется при изображении пространственных фигур на плоскости, в частности в фотографии и в кино; тени от предметов являются их проекциями и т. д. В этом пункте мы рассмотрим самый простой, но наиболее важный из способов проектирования в пространстве — **ортогональное проектирование.** («Ортогональный» в переводе значит «прямоугольный».) Будем говорить просто о проектировании и проекциях, имея в виду ортогональное проектирование.

Проекция точки на плоскость в стереометрии определяется дословно так же, как проекция точки на прямую в планиметрии.

Определение. **Проекцией точки на плоскость называется основание перпендикуляра, опущенного из этой точки на данную плоскость, или сама данная точка, если она лежит на заданной плоскости.**

Проекцией фигуры F на плоскость α называется фигура F', состоящая из проекций всех точек фигуры F на эту плоскость (рис. 94). Преобразование, сопоставляющее каждой точке X фигуры F ее проекцию $X' \in F'$, называется **проектированием (проецированием)** F **на** α.

Проектировать на плоскость мы будем, кроме точек, главным образом отрезки. Этого достаточно, чтобы проектировать треугольники и многоугольники. О проекции отрезка говорится в следующей лемме:

Лемма *(о проекции отрезка).* ***Проекцией отрезка на плоскость является отрезок, за исключением того случая, когда отрезок перпендикулярен плоскости,— в этом случае проекцией отрезка является точка.***

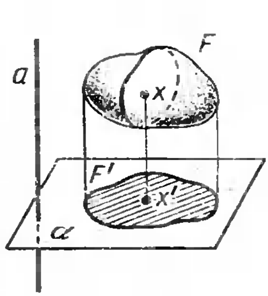


Рис. 94

Доказательство. Пусть даны отрезок AB и плоскость α. Если прямая AB перпендикулярна α, то проекцией AB на α является точка пересечения прямой AB и α (рис. 95). Рассмотрим случай, когда прямая AB не перпендикулярна плоскости α.

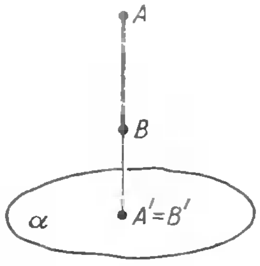


Рис. 95

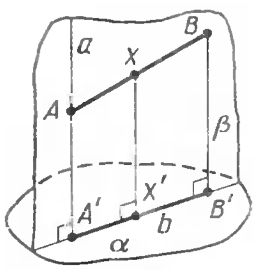


Рис. 96

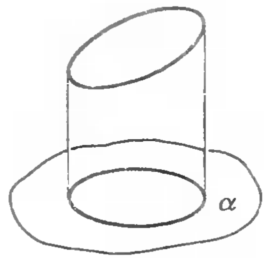


Рис. 97

Проведем через точку A прямую $a \perp \alpha$ (рис. 96). Плоскость β, проходящая через прямые a и AB, будет перпендикулярна α (по признаку перпендикулярности плоскостей). Следовательно, она покрыта перпендикулярами к плоскости α. А эти перпендикуляры к плоскости α перпендикулярны прямой b, по которой β пересекает α. Поэтому проекция отрезка AB на плоскость α — это его проекция на прямую b в плоскости β, т. е. отрезок $A'B'$. Лемма доказана.

Рассмотрим еще проекцию окружности на плоскость (когда плоскость окружности не перпендикулярна плоскости проекции). Кривая, которая является проекцией окружности в этом случае, называется **эллипсом** (рис. 97). Эллипсы обладают многими замечательными свойствами. Эллипс имеет центр симметрии и две взаимно перпендикулярные оси симметрии, которые называются большой и малой осями эллипса. По эллипсам (эллиптическим орбитам) двигаются планеты вокруг Солнца. Солнце, однако, находится не в центре эллиптической орбиты планеты, а в точке, называемой фокусом эллипса. Окружность является частным случаем эллипса.

12.2. Параллельное проектирование

Ортогональное проектирование на плоскость является частным случаем **параллельного проектирования** на плоскость, которое определяется следующим образом.

Пусть даны плоскость α и пересекающая ее прямая a. Возьмем в пространстве произвольную точку X. В том случае, когда точка X не лежит на a, через X проводим прямую $a' \parallel a$ (рис. 98). Прямая a' пересекает плоскость α в некоторой точке X'. Эта точка называется проекцией (на плоскость α) точки X при проектировании параллельно прямой a. Если точка X лежит на прямой a, то ее параллельной проекцией X' называется точка, в которой a пересекает α. О прямой a говорят, что она задает направление

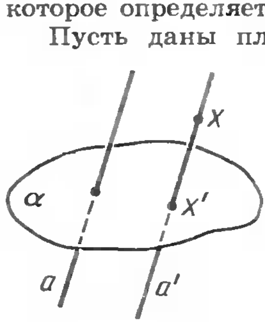


Рис. 98

проектирования, потому что при замене прямой a любой другой прямой, параллельной ей, результат проектирования не изменится (так как все эти прямые параллельны друг другу).

Ортогональное проектирование является частным случаем параллельного проектирования, когда проектирующие прямые перпендикулярны плоскости проекции.

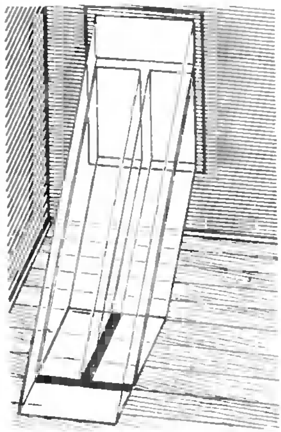


Рис. 99

Параллельную проекцию реальной фигуры представляет, например, ее тень, падающая на плоскую поверхность при солнечном освещении, поскольку солнечные лучи можно считать параллельными (рис. 99). Так, глядя на свою тень на земле, вы видите свою параллельную проекцию. Отметим, что параллельной проекцией окружности на плоскость, когда плоскость окружности не параллельна направлению проектирования, тоже является эллипс (как и при ортогональном проектировании).

Мы уже не раз пользовались параллельным проектированием при изображении пространственных фигур на плоскости и опирались на следующие его свойства. Они касаются отрезков и прямых, непараллельных направлению проектирования.

Свойство 1. ***Проекция прямой есть прямая, а проекция отрезка — отрезок.***

Свойство 2. ***Проекции параллельных прямых параллельны или совпадают.***

Свойство 3. ***Отношение проекций отрезков, лежащих на одной прямой, равно отношению самих отрезков.***

Доказательство. Пусть α — плоскость проекции и прямая a задает направление проектирования.

1. Рассмотрим какую-либо прямую b, непараллельную прямой a. Так как a можно заменить любой параллельной ей прямой, то можно считать, что a пересекает b. Тогда через прямые a и b проходит плоскость β. Она пересекает плоскость α по некоторой прямой b'. Эта прямая b' и будет проекцией прямой b (рис. 100).

В самом деле, проекцией каждой точки $X \in b$ будет некоторая точка $X' \in b'$ и каждая точка $Y' \in b'$ является проекцией некоторой точки $Y \in b$. Это потому, что все проектирующие прямые, пересекающие прямую b (прямую b'), находятся в плоскости β, а значит, пересекают прямую b' (прямую b). Любой отрезок AB, лежащий на прямой b, проектируется в отрезок $A'B'$ прямой b', где A' и B' — проекции точек A и B. Действительно, проектирующая прямая a_X, проходящая через любую внутреннюю точку X отрезка AB, идет между

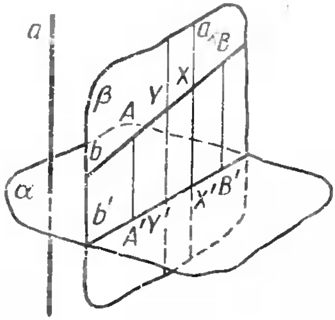


Рис. 100

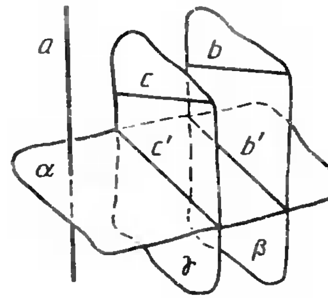


Рис. 101

проектирующими прямыми, проходящими через A и B. Поэтому и точка X' лежит между A' и B', т. е. на отрезке $A'B'$. Когда X пробегает отрезок AB, точка X' пробегает отрезок $A'B'$.

2. Пусть теперь даны две параллельные прямые b и c. Если прямая c лежит в плоскости β, то ее проекцией на α тоже является прямая b', т. е. проекции прямых b и c на α совпадают. Если c не лежит в плоскости β, то c параллельна плоскости β. В этом случае через c проходит плоскость γ, параллельная плоскости β (рис. 101). Проекцией прямой c на α является прямая c', по которой пересекаются плоскости α и γ. Прямые b' и c' параллельны, так как получены при пересечении параллельных плоскостей β и γ плоскостью α.

3. Рассмотрим два отрезка AB и CD, лежащие на прямой b. Проекции $A'B'$ и $C'D'$ отрезков AB и CD лежат на прямой b' (рис. 102). Проектирующие прямые, проходящие через точки A, B, C, D, параллельны прямой a и, значит, параллельны друг другу (или совпадают). Кроме того, они все лежат в плоскости β. По известной теореме планиметрии параллельные прямые отсекают на двух прямых пропорциональные отрезки. Значит,

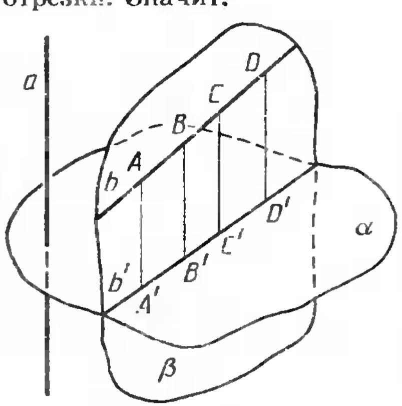


Рис. 102

$$\frac{AB}{CD}=\frac{A'B'}{C'D'}.$$

Итак, мы доказали все три свойства параллельного проектирования.

Проектирование пространственных фигур на плоскость позволяет сводить решение стереометрических задач к задачам планиметрии. Поскольку удобнее пользоваться ортогональным проектированием, то в дальнейшем под словом «проекция» имеется в виду ортогональная проекция.

12.1. В тетраэдре $PABC$ углы всех граней в вершине B прямые. Нарисуйте проекцию: а) PA на (ABC); б) PA на (PBC); в) треугольника PAC на (ABC); г) треугольника PAC на (ABP); д) AC на (PAB); е) AC на (PBC); ж) треугольника PAB на (PBC); з) треугольника PBC на (ABC); и) треугольника ABC на (PAB).

12.2. Нарисуйте прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Нарисуйте проекцию на плоскость каждой его грани: а) AA_1; б) CD_1; в) B_1D; г) треугольника AA_1B; д) грани BB_1C_1C; е) сечения BB_1D_1D.

12.3. Нарисуйте правильный тетраэдр $PABC$. Нарисуйте проекцию: а) PA на (ABC); б) PA на (PBC); в) AC на (PAB); г) треугольника PAC на (ABC).

12.4. Пусть $PABCD$ — правильная четырехугольная пирамида. Нарисуйте проекцию: а) PA на (ABC); б) PA на (PBD); в) AD на (PAC); г) треугольника PBC на (ABC); д) треугольника PAB на (PBD); е) треугольника PBD на (PAC).

12.5. Пусть треугольник ABC равнобедренный и его основание AC лежит в плоскости α. Пусть треугольник AB_1C — проекция треугольника ABC на α, а BK — высота треугольника ABC. а) Докажите, что B_1K — высота треугольника AB_1C. б) Пусть отношение высот этих треугольников равно 2. Чему равно отношение их площадей? в) Пусть отношение площадей этих треугольников равно k. Чему равно отношение их высот? г) Пусть площадь треугольника ABC равна S. В каких границах лежит площадь треугольника AB_1C?

12.6. а) Проекцией равностороннего треугольника ABC на плоскость α оказался прямоугольный треугольник AB_1C. Чему равно отношение площадей этих треугольников? б) Проекцией равнобедренного треугольника ABC на плоскость α оказался треугольник AB_1C. При этом $\angle B=\varphi$, $\angle B_1=\varphi_1$. Чему равно отношение площадей этих треугольников?

12.7. Прямая a перпендикулярна плоскости α. Нарисуйте проекцию α на плоскость, проходящую через a.

12.8. а) Плоскости α и β перпендикулярны. Нарисуйте проекцию α и β на плоскость γ, перпендикулярную и α и β. б) Плоскости α и β пересекаются. Нарисуйте их проекцию на плоскость γ, перпендикулярную и α и β.

12.9. На рисунке 103 (см. стр. 74) изображены проекции некоторой фигуры на плоскость. Нарисуйте эту фигуру.

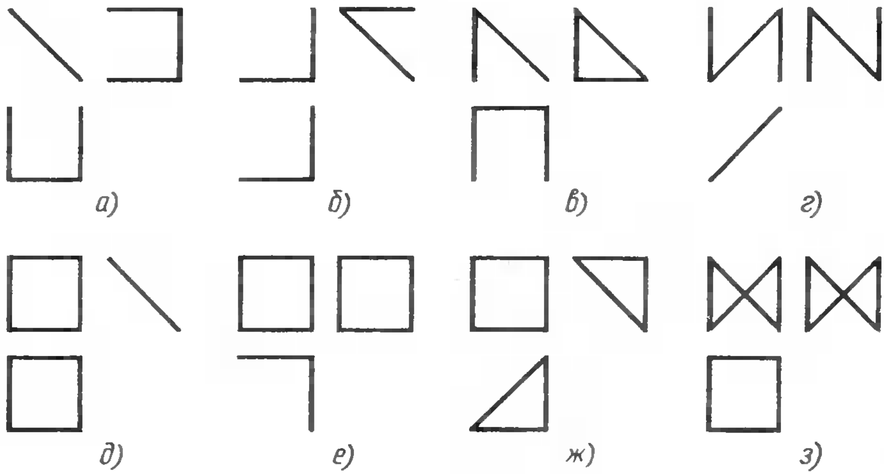


Рис. 103

§ 13. РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ФИГУРЫ

13.1. Расстояния между точками и от точки до фигуры

Мы приступаем к решению задач о расстояниях между точками, от точки до фигуры, между фигурами. Такие задачи постоянно встречаются в практике: расстояние до другого берега реки, между двумя домами, от материка до острова и т. п. Расстояние от точки до фигуры измеряется по кратчайшему пути, как, например, от данного места до ближайшей точки на другом берегу. Поэтому **расстоянием от данной точки A до фигуры** F называется расстояние от этой точки до ближайшей к A точке фигуры F. **Ближайшая же к A точка фигуры** F — это такая точка $B \in F$ (рис. 104), что для всех точек X фигуры F

$$|AB| \leqslant |AX|.$$

Иначе говоря, если точка A не принадлежит фигуре F, то отрезок AB — кратчайший из отрезков AX, соединяющих точку A с точками фигуры F. (Если же $A \in F$, то ясно, что точка A оказывается ближайшей к самой себе.) В дальнейшем случай, когда $A \in F$, мы исключаем из рассмотрения. Расстояние от точки A до фигуры F обозначаем $|AF|$.

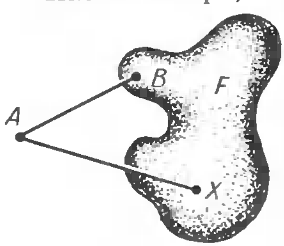


Рис. 104

Определение расстояния от точки до фигуры уже было дано в планиметрии; разница лишь в том, что теперь не требуется, чтобы фигура и точка лежали в одной плоскости.

Рассмотрим несколько примеров.

1. *Расстояние от центра окружности до самой окружности равно радиусу.* Все точки окружности находятся на одном расстоянии от центра, они все ближайшие к нему (рис. 105).

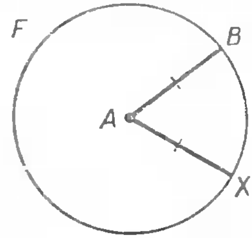


Рис. 105

2. *Расстояние от точки A до прямой a равно длине перпендикуляра, опущенного из A на a.* Это известно из планиметрии.

3. *Расстояние от точки до плоскости равно длине перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость,* или, что то же, расстоянию от точки до ее проекции на плоскость.

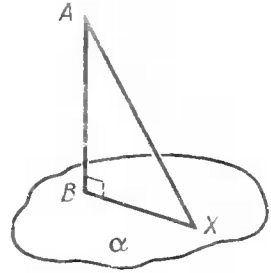


Рис. 106

Действительно, пусть AB — перпендикуляр, опущенный из точки A на плоскость α (рис. 106). Возьмем любую точку $X \in \alpha$, отличную от точки B. Треугольник ABX прямоугольный, и, значит, $|AB| < |AX|$. Следовательно, точка B — ближайшая к A точка плоскости α и расстояние от A до α равно $|AB|$.

При вычислении расстояний часто применяется следующая лемма:

Л е м м а *(о длине наклонной).* ***Если A — данная точка, B — ее проекция на плоскость α, то для любой точки $X \in \alpha$***

$$AX^2 = AB^2 + BX^2. \quad (1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $A \in \alpha$. Тогда $A = B$ и $|AB| = 0$. Поэтому (1) верно. Пусть теперь A не лежит в плоскости α. Тогда отрезок AB — это перпендикуляр, опущенный из точки A на α. Для любой точки $X \in \alpha$, отличной от B, треугольник ABX прямоугольный (рис. 106) и равенство (1) следует из теоремы Пифагора. Если же $X = B$, то $|BX| = 0$ и (1) тоже верно. $\blacksquare$

13.2. Теорема о ближайшей точке

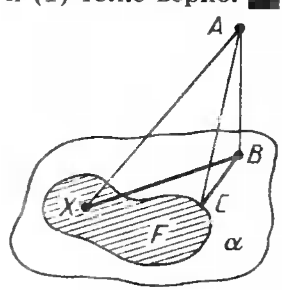


Рис. 107

Посмотрите на рисунок 107. Можно заметить, что точка C фигуры F, лежащей в плоскости α, является ближайшей одновременно и к точке A, и к точке B — проекции точки A на плоскость α. Иначе говоря, подойти как можно ближе к точке A — это то же самое, что подойти как можно ближе к ее проекции B

(конечно, при условии, что мы остаемся в пределах данной фигуры F). Это хорошо известно из практики. Например, для того чтобы ближе подойти к человеку, стоящему на мачте или на вышке A, нужно подойти как можно ближе к ее основанию B.

Выразим это наблюдение в виде теоремы и докажем ее.

Теорема *(о ближайшей точке).* ***Пусть фигура F лежит в плоскости α. A — некоторая точка и B — ее проекция на α. Точка фигуры F будет ближайшей к точке A тогда и только тогда, когда она является ближайшей к ее проекции — точке B.***

Доказательство. Пусть заданы точка A и фигура F, лежащая в плоскости α. Пусть, далее, B — проекция A на α (рис. 107), когда $B \notin F$. Возьмем любую точку X фигуры F. Тогда по лемме о длине наклонной

$$AX^2 = AB^2 + BX^2.$$

Тем самым квадраты расстояний AX^2 и BX^2 отличаются на постоянную AB^2. Поэтому если расстояние AX (BX) становится наименьшим, то наименьшим становится и другое расстояние BX (AX). Значит точка X, ближайшая к точке A, будет ближайшей к точке B и обратно. ■

Замечание. Из теоремы о ближайшей точке следует, что из данной точки A в ближайшую точку плоской фигуры F можно попасть так: сначала в ближайшую точку B самой плоскости, а потом из точки B в ближайшую к ней точку фигуры F.

13.3. Теорема о трех перпендикулярах

Для случая, когда в теореме о ближайшей точке фигура — это прямая, из теоремы о ближайшей точке вытекает такое следствие:

Следствие 1 *(теорема о проекциях).* ***Пусть A — данная точка, a — прямая, лежащая в данной плоскости α, и B — проекция A на α. Тогда проекции точек A и B на прямую a совпадают — это одна и та же точка C*** (рис. 108).

Доказательство. Поставьте в теореме о ближайшей точке на место фигуры F прямую a и замените слова «ближайшая точка» равнозначным словом «проекция», и вы получите теорему о проекциях. ■

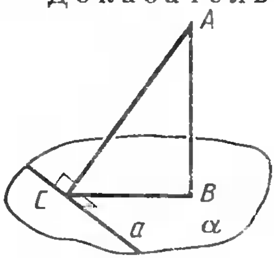


Рис. 108

Теорему о проекциях можно сформулировать и как теорему о трех перпендикулярах.

Следствие 2 *(теорема о трех перпендикулярах).* ***Прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна наклонной***

к этой плоскости тогда и только тогда, когда она перпендикулярна ее проекции.

Отрезки AC и BC одновременно оказываются перпендикулярными прямой a: если один перпендикулярен ей, то и другой тоже.

Задачи к § 13

Основные задачи

13.1. Треугольник ABC правильный со стороной, равной d. Точка O — его центр, точка X — переменная точка перпендикуляра к его плоскости, проходящего через O. Пусть d_1 — расстояние от X до плоскости ABC, d_2 — расстояние от X до вершин треугольника и d_3 — расстояние от X до сторон треугольника. Установите зависимости между этими величинами. Получите также аналогичные зависимости для правильного n-угольника.

13.2. Лучи OA и OB лежат в плоскости α. Луч OC образует с ними равные углы. Какое положение на плоскости α занимает проекция луча OC на эту плоскость?

Р е ш е н и е. Конфигурация лучей, заданная в условии, нам уже встречалась. Если нарисовать правильную пирамиду $COAB$ с вершиной в точке C, то $\angle COB = \angle COA$. Так как точка C проектируется в центр основания Q, то луч OC проектируется в луч OQ (рис. 109, *а*). Луч OQ является биссектрисой угла AOB, так как пирамида правильная. Поэтому можно предположить, что проекцией луча OC будет биссектриса угла AOB не только при угле AOB, равном $60°$, но и в общем случае. Если посмотреть на данную конфигурацию как бы сверху, в направлении перпендикуляра из любой точки луча OC на плоскость AOB, то в силу равенства углов COA и COB увидим луч OC как биссектрису угла AOB.

Теперь, когда стало ясно, что нужно доказывать, перейдем к самому доказательству. Пусть точка C_1 — проекция точки C на плоскость AOB, тогда луч OC_1 — проекция луча OC. Мы хотим доказать, что $\angle C_1OA = \angle C_1OB$. Равенство углов

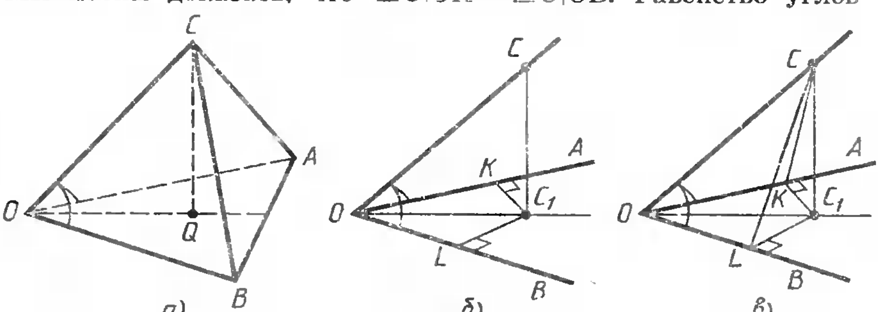


Рис. 109

чаще всего доказывается на основании равенства треугольников, проще всего прямоугольных треугольников. Такие треугольники легко построить, проведя $C_1K \perp OA$ и $C_1L \perp OB$ (рис. 109, *б*). Для доказательства их равенства достаточно получить, что $OK=OL$. Эти отрезки лежат в треугольниках OCK и OCL (рис. 109, *в*). Треугольники OCK и OCL также прямоугольные ($CK \perp OA$ по теореме о трех перпендикулярах, аналогично $CL \perp OB$), имеют общую гипотенузу OC и равные углы COK и COL (по условию). Из равенства этих треугольников следует, что $OK=OL$. Теперь, перейдя к треугольникам OKC_1 и OLC_1, получим, что углы KOC_1 и LOC_1 равны, что и требовалось.

В этом доказательстве мы полагали, что точка C_1 находится внутри угла AOB, но может быть и так, что C_1 совпадает с O или C_1 лежит вне угла AOB. Не может быть только такого положения точки C_1, когда она лежит внутри стороны угла или внутри ее продолжения. (Подумайте почему.) Подумайте, какое положение на плоскости AOB будет занимать луч OC_1 в этих случаях.

Подумайте также над тем, как зависит положение точки C_1 на плоскости AOB от величины данных равных углов COA и COB.

* * *

Задачи к п. 13.1

13.3. а) Известны диагональ прямоугольного параллелепипеда и два его измерения. Как вычислить его третье измерение? Приведите численный пример. б) Пусть диагональ куба равна 1. Чему равняется его ребро?

13.4. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 2, точка K — середина ребра CD, точка L — середина ребра C_1B_1, точка M — центр грани AA_1B_1B. Вычислите расстояния: а) A_1K; б) KL; в) LM.

13.5. Диагональ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 1. 1) Пусть $AD=2CD$. Обозначив $|CD|$ через x, выразите через x: а) другие его ребра; б) площади его граней; в) площадь сечения A_1B_1CD; г) площадь сечения AB_1C; д) расстояния от A_1 до центров его граней. 2) Сделайте то же, взяв вместо условия $AD=2CD$ условие $\angle A_1CA = 45°$. 3) Сделайте то же, взяв вместо условия $AD=2CD$ условие $\angle C_1DC=60°$.

13.6. Плоскости α и β взаимно перпендикулярны и пересекаются по прямой p. Из точки $A \in \alpha$ опущен перпендикуляр AA_1 на p. Из точки $B \in \beta$ опущен перпендикуляр BB_1 на β. Докажите, что

$$AB^2 = AA_1^2 + A_1B_1^2 + B_1B^2.$$

13.7. Плоскости α и β перпендикулярны, точка $A \in \alpha$, точка $B \in \beta$. Из A провели перпендикуляр AA_1 на β, из B провели перпендикуляр BB_1 на α. $|AB|=1$, $\angle ABA_1=\varphi_1$, $\angle ABB_1=\varphi_2$. Чему равно $|A_1B_1|$, если $\varphi_1=30°$, а $\varphi_2=30°$, $45°$, $60°$?

13.8. От верхнего конца столба высотой H тянут провод к точке стены дома на высоте h. Какие данные еще нужны, чтобы вычислить длину провода?

Задачи к п. 13.2

13.9. Пусть точка A не принадлежит фигуре F. Какое утверждение является верным: а) в фигуре F существует точка, ближайшая к A; б) в фигуре F существует не больше одной точки, ближайшей к A?

13.10. Точка A и фигура F лежат в одной плоскости. Чему равно расстояние от A до F, если F: а) отрезок BC, причем $|BC|=2$, $|AC|=2$, $|AB|=3$; б) окружность с центром O радиусом 2, причем $|OA|=1$; в) круг с центром O радиусом 1, причем $|OA|=3$; г) равносторонний треугольник KLM со стороной 1, причем $|AL|=|AM|=2$; д) квадрат $KLMN$ со стороной 1, причем расстояние от A до прямой KN равно 2, а расстояние от A до прямой KL равно 3?

13.11. 1) Точка A не лежит в плоскости α. Сколько точек, ближайших к A, может быть в плоскости α? 2) Приведите пример поверхности, у которой: а) есть больше одной точки, ближайшей к данной; б) нет ни одной точки, ближайшей к данной; в) все точки являются ближайшими к данной.

13.12. а) Пусть $|A\alpha|=2$, точка B такова, что $|AB|=1$. В каких границах находится $|B\alpha|$? б) Решите такую же задачу, если $|A\alpha|=1$, $|AB|=2$.

13.13. Прямая AB перпендикулярна плоскости α. Известны $|A\alpha|$ и $|B\alpha|$. Как найти $|AB|$? Возьмите разные случаи расположения A и B относительно α. Именно: а) A и B по разные стороны от α; б) A и B с одной стороны от α.

13.14. Известны $|A\alpha|$, $|B\alpha|$ и угол между прямой AB и ее проекцией на плоскость α. Как найти $|AB|$? Как найти длину проекции отрезка AB на α?

13.15. а) Пусть AB — наклонная к плоскости α, причем $A \in \alpha$ и $|B\alpha|=d$. Чему равно расстояние до α от середины наклонной AB? б) Пусть $|A\alpha|=d_1$, $|B\alpha|=d_2$, точка C — середина AB. Чему равно $|C\alpha|$? в) Пусть C — середина отрезка AB, $|A\alpha|=d_1$, $|C\alpha|=d_2$. Чему равно $|B\alpha|$? (Указание. точки A и B могут лежать с одной стороны от α и по разные стороны от нее.)

13.16. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб с ребром, равным 1, точка K — середина ребра C_1D_1, точка F — центр грани BB_1C_1C. Вычислите: а) $|A_1,(CDD_1)|$; б) $|A_1,(BB_1D_1)|$; в) $|A_1,(AD_1C_1)|$; г) $|K,(A_1B_1B)|$; д) $|K,(AA_1C_1)|$; е) $|K,(A_1B_1C)|$; ж) $|F,(AA_1D_1)|$; з) $|F,(ABB_1)|$.

13.17. $PABC$ — правильный тетраэдр с ребром 1, Q — центр основания, точка K — середина PB. Вычислите: а) $|K, (ABC)|$; б) $|K, (APC)|$; в) $|B, (APQ)|$; г) $|K, (APQ)|$.

13.18. Докажите, что в правильном тетраэдре: а) расстояние от вершин до плоскостей противоположных граней одно и то же; б) расстояние от каждой точки высоты, проведенной к основанию, до плоскостей боковых граней одно и то же. Какое из этих утверждений верно для правильной треугольной пирамиды?

13.19. Пусть AB — перпендикуляр и AC — наклонная, проведенные из точки A к плоскости α, $|AB|=1$, $|AC|=2$. Точка K — некоторая точка на AC. Выразите $|K\alpha|$ как функцию от x, где x — расстояние: а) $|KC|$; б) $|KA|$; в) от K до прямой AB. В каких границах лежат эти расстояния?

13.20. $PABC$ — правильный тетраэдр с ребром, равным 1, K — некоторая точка ребра PB, L — некоторая точка высоты PQ. Пусть $|KB|=x$. Выразите как функцию от x: а) $|K, (ABC)|$; б) $|K, (PAC)|$. При каком x эти расстояния равны? первое больше второго? Пусть $|PL|=y$. Выразите как функцию от y расстояние $|L, (PAB)|$. В каких границах лежат эти расстояния?

Задачи к п. 13.3

13.21. Через точку A, лежащую в плоскости α, проведен перпендикуляр AB к плоскости α. Нарисуйте самый короткий и самый длинный отрезок BX, где точка X принадлежит таким фигурам плоскости α: а) прямой; б) окружности; в) кругу; г) равностороннему треугольнику, центр которого находится в точке A; д) равнобедренному треугольнику, у которого две равные стороны имеют общую вершину A; е) квадрату, у которого центр находится в точке A; ж) квадрату, у которого точка A является серединой одной из сторон; з) квадрату, у которого точка A — одна из вершин.

13.22. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Нарисуйте точку, ближайшую к вершине A_1: а) в грани $ABCD$; б) в грани BCC_1B_1; в) в сечении BB_1D_1D; г) в сечении BC_1D_1A; д) в треугольнике BCD; е) в сечении CB_1D_1.

13.23. Фигура F лежит в плоскости α, точка A не лежит в этой плоскости, точка B фигуры F является ближайшей к точке A. Следует ли отсюда, что прямая AB перпендикулярна α?

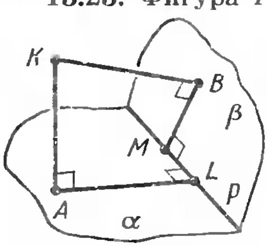


Рис. 110

Задачи к п. 13.4

13.24. Плоскости α и β пересекаются по прямой p. Из точки O проведены перпендикуляр OA на плоскость α, перпендикуляр OB на плоскость β, перпендикуляр OC на прямую p. Как расположены между собой прямые OC и AB?

13.25. Плоскости α и β пересекаются по прямой p (рис. 110). Из точки K проведен перпендикуляр KA на плоскость α и перпендикуляр KB на плоскость β. Из точки A проведен перпендикуляр AL на прямую p, а из точки B — перпендикуляр BM на прямую p. Есть ли ошибка на рисунке?

13.26. Пусть $a \perp \alpha$, прямая b лежит в α, $(AB) \perp b$ и $(KC) \perp b$ (рис. 111). Есть ли ошибка на рисунке?

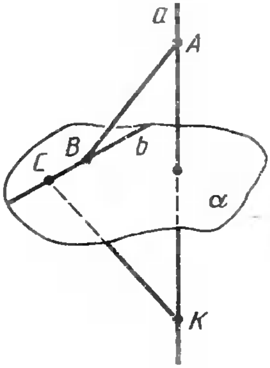


Рис. 111

13.27. Пусть $ABCD$ — квадрат (рис. 112). К его плоскости проведен перпендикуляр BP. Проведены отрезки PA, PC, PD. Сколько пар перпендикулярных прямых изображено на рисунке? Объясните, почему $PA \perp AD$, $PC \perp CD$.

13.28. Треугольник ABC прямоугольный. Точка K — середина гипотенузы BC, точка L лежит на перпендикуляре к плоскости ABC, проведенном через K. Нарисуйте перпендикуляры из точки L на прямые AC и AB.

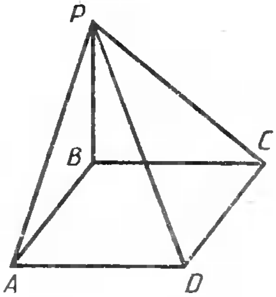


Рис. 112

§ 14. РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ФИГУРАМИ. РАССТОЯНИЕ И ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ

14.1. Расстояние между фигурами

Мы уже определяли расстояние от точки до фигуры. Теперь определим расстояние между фигурами. Рассмотрим две фигуры F_1 и F_2. Их точки $A_1 \in F_1$ и $A_2 \in F_2$ называются их **ближайшими точками**, если для любых точек $X_1 \in F_1$ и $X_2 \in F_2$ выполняется неравенство $A_1A_2 \leqslant X_1X_2$ (рис. 113). Иначе говоря, отрезок A_1A_2 является кратчайшим среди всех отрезков, соединяющих точки фигур F_1 и F_2. Представление о нем дает рука, когда вы с трудом достаете некоторый предмет.

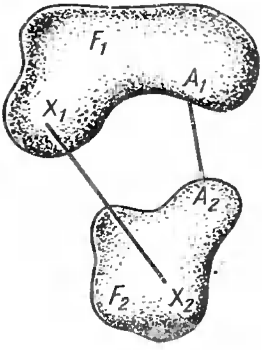


Рис. 113

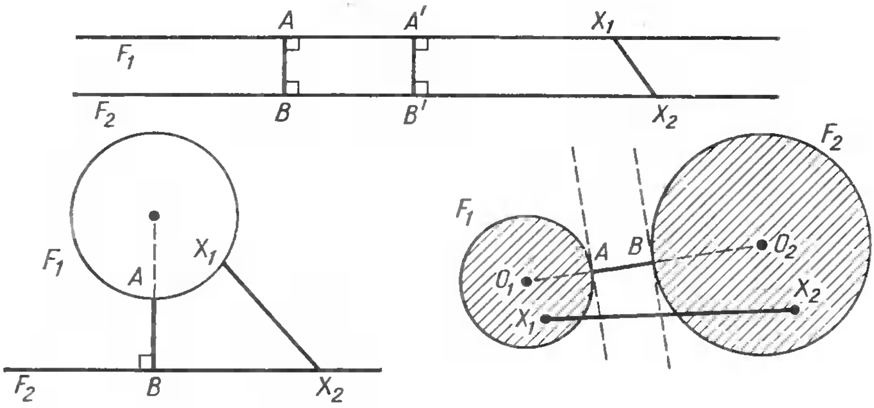


Рис. 114

Расстоянием между двумя фигурами называется расстояние между ближайшими точками этих фигур, если такие точки существуют.

Расстояние от точки до фигуры является частным случаем расстояния между фигурами, когда одна фигура — точка.

Расстояние между фигурами F_1 и F_2 будем обозначать $|F_1F_2|$. На рисунке 114 приведены примеры ближайших точек фигур, лежащих в одной плоскости,— двух параллельных прямых, прямой и круга, двух кругов.

14.2. Расстояние между прямыми и плоскостями

Расстояния в пространстве между прямыми и плоскостями, не имеющими общих точек, во всех возможных случаях равны длинам их общих перпендикуляров. Случай двух параллельных прямых уже рассматривался в планиметрии. Рассмотрим подробно все остальные возможные случаи.

1. Расстояние между параллельными плоскостями. Для двух параллельных плоскостей есть прямая, перпендикулярная им обоим. Ее отрезок с концами на этих плоскостях — это их общий перпендикуляр. Его длина дает расстояние между плоскостями. Чтобы доказать это, докажем сначала лемму:

Лемма *(об отрезках между параллельными плоскостями)*. ***Параллельные отрезки с концами на двух параллельных плоскостях равны.***

Доказательство. Рассмотрим параллельные отрезки AB и CD с концами A, C на плоскости α и B, D на плоскости β, параллельной α (рис. 115). Через параллельные прямые AB и CD проведем плоскость γ. Она пересекает плоскости α и β по параллельным прямым AC и BD (по лемме п. 10.2). Поэтому четырехугольник $ABDC$ — параллелограмм.

Его противоположные стороны AB и CD равны. Лемма доказана.

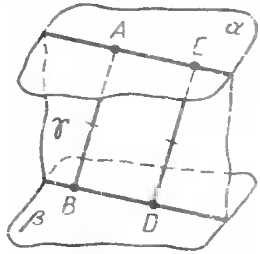


Рис. 115

Так как *все общие перпендикуляры двух параллельных плоскостей параллельны друг другу* (теорема о параллельности перпендикуляров п. 7.1 и теорема п. 10.3), то из доказанной леммы вытекает, что они *и равны друг другу*. Концы любого общего перпендикуляра двух параллельных плоскостей — это ближайшие точки этих плоскостей, так как длина любой их общей наклонной больше длины общего перпендикуляра. Поэтому *расстояние между параллельными плоскостями равно длине любого их общего перпендикуляра* (рис. 116, *а*). Эти перпендикуляры заполняют **слой между параллельными плоскостями.** Иначе говоря, параллельные плоскости проходят на постоянном расстоянии друг от друга или слой между параллельными плоскостями имеет всюду одинаковую толщину. Параллельность плоскостей так и проверяют, измеряя толщину слоя между этими плоскостями.

Из сделанных выводов вытекает следующее утверждение: *расстояние от любой фигуры, лежащей в одной из параллельных проскостей, до другой плоскости равно длине общего перпендикуляра этих плоскостей* (рис. 116, *б*, $|F\alpha| = |AB| = |PQ|$). Это утверждение мы применим для нахождения расстояния между параллельными прямой и плоскостью, а также для определения высоты призмы.

Основания призмы лежат в параллельных плоскостях, а сама призма лежит между этими плоскостями. Поэтому **высотой призмы** называется перпендикуляр, опущенный из любой точки основания призмы на плоскость другого ее основания, а также его длина. Можно сказать, что высота призмы — это расстояние между плоскостями ее оснований. Измеряя высоту потолка в вашей комнате, вы находите высоту призмы.

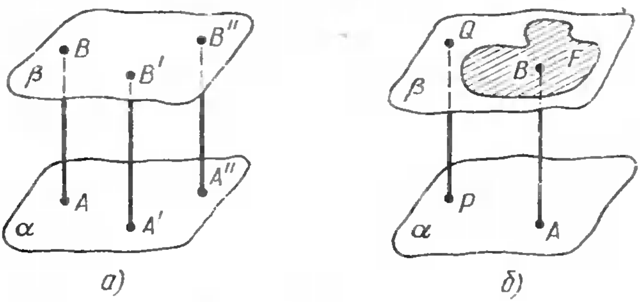


Рис. 116

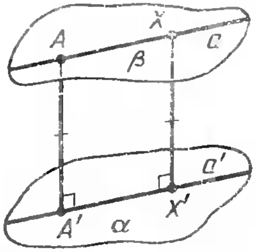


Рис. 117

2. Расстояние между параллельными прямой и плоскостью. Пусть прямая a параллельна плоскости α. Проведем через a плоскость $\beta \parallel \alpha$. Любой перпендикуляр AA', опущенный из точки $A \in a$ на α, является как общим перпендкуляром α и β (рис. 117), так и общим перпендикуляром a и α. Все эти перпендикуляры равны друг другу. Их длина равна расстоянию между a и α. Такие перпендикуляры заполняют полосу между прямыми a и a'.

Итак, *прямая, параллельная плоскости, идет на постоянном расстоянии от этой плоскости.*

3. Расстояние между скрещивающимися прямыми вы найдете, решив задачу 14.28.

▲ 14.3. Расстояние и параллельность

Параллельные прямые и плоскости определяются как прямые и плоскости, которые не пересекаются (на всем их бесконечном протяжении). Но реально мы имеем дело с конечными отрезками прямых и конечными кусками плоскостей, хотя и не идеальными, но прямыми и плоскими с той или иной точностью. Параллельность противоположных краев пола или доски, двух рельсов и т. п., так же как параллельность пола и потолка, двух противоположных стен или междуэтажных перекрытий,— все это определяется не тем, что получается при их бесконечном продолжении. Никакой плотник не продолжает краев доски до бесконечности, как и строители, даже мысленно, не продолжают ни междуэтажных перекрытий, ни стен дома. Словом, на самом деле в параллельных прямых и плоскостях важны и имеют реальный смысл те свойства, которые относятся к их конечным отрезкам и кускам. На основании этих же свойств производится построение параллельных прямых и плоскостей, а в действительности — их конечных кусков.

Важнейшим среди таких свойств, характеризующих параллельность прямых и плоскостей, является постоянство расстояния, т. е. равноудаленность точек одной прямой или плоскости от другой. Как доказано в п. 14.2, все общие перпендикуляры двух параллельных плоскостей равны.

Выполняется также и обратное утверждение: концы равных перпендикуляров к данной плоскости, расположенные с одной стороны от нее, лежат в одной плоскости, параллельной данной, и заполняют ее.

Реальным воплощением отрезков, о которых идет речь, могут представляться столбы и колонны, стоящие на основании здания и подпирающие параллельное ему перекрытие. На колонны равной высоты опирается верхняя плоскость здания, например греческого храма (рис. 64). Но и в современном строительстве укладывают междуэтажные перекрытия на вертикальных столбах равной высоты. Их верхние концы оказываются в плоскости, параллельной той, где лежат их основания (рис. 118). ▼

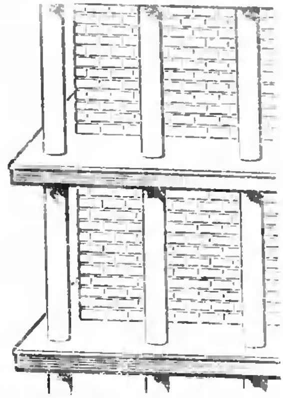


Рис. 118

Основные задачи

14.1. Даны две параллельные плоскости. Какую фигуру образуют точки, равноудаленные от этих плоскостей?

14.2. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ в вершине A сходятся три ромба со стороной 2 и острым углом при вершине A, равным $60°$. Нарисуйте и вычислите высоту параллелепипеда.

14.3. Пусть $\alpha \parallel \beta$, $A \in \alpha$. а) $|\alpha\beta| = 1$. Найдите $|A\beta|$. б) $|A\beta| = d$. Найдите $|\alpha\beta|$.

14.4. $\alpha \parallel \beta$, $A \in \alpha$, $B \in \beta$, $|A\beta| = 1$. а) Найдите $|B\alpha|$. б) $|AB| = 1$. В каких границах лежит $|\alpha\beta|$?

14.5. $\alpha \parallel \beta$. Пусть известны $|A\alpha|$ и $|\alpha\beta|$. Как вычислить $|A\beta|$? Приведите численные примеры.

Решение. Введем обозначения: $|A\alpha| = d_1$, $|\alpha\beta| = d$, $|A\beta| = x$. В задаче, зная величины d и d_1, надо найти x.

Прежде всего заметим, что положение точки A относительно плоскостей α и β может быть различным. Для удобства отметим на рисунке все возможные положения точки A (рис. 119, *а*) относительно данных плоскостей на прямой p, перпендикулярной плоскости α (а значит, и плоскости β).

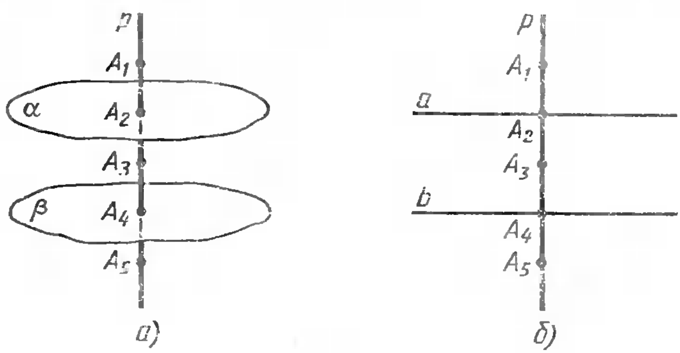


Рис. 119

Случаи, когда $A \in \alpha$ (A_2) или $A \in \beta$ (A_4), неинтересны, поэтому рассмотрим положения A_1, A_3, A_5.

Для положения A_1 имеем $|A\beta| = |A\alpha| + |\alpha\beta|$, откуда $x = d + d_1$.

Для положения A_3 имеем $|A\beta| = |\alpha\beta| - |A\alpha|$, откуда $x = d - d_1$.

Для положения A_5 имеем $|A\beta| = |A\alpha| - |\alpha\beta|$, откуда $x = d_1 - d$.

Таким образом, мы видим, что искомая величина зависит от положения точки A относительно данных плоскостей и задача не имеет однозначного решения.

Заметим, что задачу можно свести к планиметрической, проведя плоскость γ через прямую p. Пусть γ пересекает α по прямой a, пересекает β по прямой b. На рисунке 119, *б* показано соответствующее положение точек и прямых в плоскости γ.

В дальнейшем при решении задач иногда сводят пространственную задачу к планиметрической: вместо пространственной фигуры рассматривают ее сечение или ее проекцию, причем на этой плоской картине сохраняются те свойства исходной фигуры, которые позволяют решить задачу.

* * *

14.6. $\alpha \parallel \beta$. Пусть известны $|A\alpha|$ и $|A\beta|$. Как вычислить $|\alpha\beta|$? Приведите численные примеры.

14.7. $\alpha \parallel \beta$ и $\beta \parallel \gamma$. Пусть известны $|\alpha\beta|$ и $|\beta\gamma|$. Как вычислить $|\beta\gamma|$? Приведите численные примеры.

14.8. а) В прямоугольном параллелепипеде ребра, выходящие из одной вершины, имеют длины 1, 2, 3. Чему равны расстояния между плоскостями его противоположных граней? б) Составьте и решите обратную задачу.

14.9. Плоскости α и β параллельны. а) Докажите, что кратчайший отрезок, соединяющий α и β, перпендикулярен α и β. б) Пусть $A \in \alpha$, $B \in \beta$ и $|AB| > |\alpha\beta|$. Докажите, что отрезок AB не является общим перпендикуляром α и β.

14.10. Какую фигуру образуют точки X, удовлетворяющие условию: а) $|X\alpha| = d$; б) $|X\alpha| < d$; в) $|X\alpha| > d$; г) $d_1 < |X\alpha| < d_2$?

14.11. $\alpha \parallel \beta$, $|\alpha\beta| = 1$, $|A\beta| = 1$. Значит ли это, что $A \in \alpha$?

14.12. а) Расстояния от точек A и B до плоскости α различны. Могут ли A и B лежать в плоскости, параллельной плоскости α? б) $|A\alpha| = |B\alpha|$. Значит ли это, что A и B лежат в плоскости, параллельной плоскости α?

14.13. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 2. Нарисуйте его сечение плоскостью, удаленной на 1 от: а) плоскости AA_1D_1; б) плоскости AA_1C_1; в) плоскости A_1BD_1. Нарисуйте его сечение плоскостью, равноудаленной от плоскостей AA_1B_1 и CDD_1.

14.14. В прямоугольном параллелепипеде провели сечение, плоскость которого равноудалена от двух его параллельных граней. Докажите, что в этой плоскости лежат: а) середины четырех его ребер; б) середины диагоналей.

14.15. Даны две параллельные плоскости. Какую фигуру образуют точки, лежащие ближе к первой из них, чем ко второй?

14.16. Почему стол на четырех ножках не всегда устойчив?

14.17. Отрезок соединяет центры оснований правильной призмы. Докажите, что он является ее высотой.

14.18. Основанием треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равносторонний треугольник со стороной 2. $\angle A_1AC = \angle A_1AB = 60°$. Нарисуйте и вычислите высоту призмы, если $|AA_1|$ равняется: а) 1; б) 2; в) 3.

14.19. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1. Вычислите расстояние между плоскостями AB_1D_1 и BDC.

Расстояние от прямой до параллельной ей плоскости

14.20. Пусть $a \parallel \alpha$, $A \in a$. а) $|A\alpha| = 1$. Найдите $|a\alpha|$. б) $|a\alpha| = d$. Найдите $|A\alpha|$.

14.21. Пусть $a \parallel \alpha$, $|Xa| = 1$. В каких границах лежит $|X\alpha|$, если $|a\alpha|$ равно: а) 1; б) 2; в) 0,5?

14.22. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед с ребрами 1, 2, 3. а) Выберите любое его ребро и вычислите расстояние от него до плоскости грани, в которой оно не лежит. б) Найдите расстояние от прямой C_1D до плоскости AA_1B_1.

14.23. $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма, $|AC| = 1$, $|AA_1| = 2$. Найдите: а) расстояние от прямой AB до плоскости $A_1B_1C_1$; б) расстояние от прямой CC_1 до плоскости AA_1B_1.

14.24. Докажите, что прямая, соединяющая центры оснований правильной призмы, равноудалена от плоскостей всех ее боковых граней.

14.25. $a \parallel b$, $|ab| = 1$. Через a и b проходят две перпендикулярные плоскости, пересекающиеся по прямой p. В каких границах находится расстояние от p до плоскости, проходящей через a и b?

14.26. $ABCD$ — равнобедренная трапеция, основание AD лежит в плоскости α, $|AB| = |BC| = |CD| = 1$, $|AD| = 2$. а) В каких границах изменяется расстояние от прямой BC до α? б) Пусть расстояние от прямой BC до α равно 1. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до α.

14.27. Имеются две прямые a и b. Точка X — переменная точка прямой a. Как меняется $|Xb|$ при движении точки X в одном направлении по прямой a?

14.28. а) Прямая a перпендикулярна плоскости α и пересекает ее в точке A. Прямая b лежит в плоскости α и скрещивается с прямой a. Докажите, что $|ab|=|AB|$. б) Две прямые a и b скрещиваются. Точка A лежит на прямой a, точка B лежит на прямой b, и при этом (AB) перпендикулярна как прямой a, так и прямой b. Докажите, что $|ab|=|AB|$. в) Постройте общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых.

14.29. В землю вертикально врыты равные столбы. На какой линии находятся их вершины, если их основания находятся на: а) одной прямой; б) одной окружности?

§ 15. УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ

В этом и следующем параграфах рассматриваются углы между прямыми и плоскостями в пространстве. Их постоянно приходится измерять в практике. Угол наклона плоскости орбиты спутника к плоскости экватора, угол падения луча света на отражающую поверхность, угол наклона орудийного ствола при выстреле, угол наклона ската крыши, долгота и широта места на Земле и другие примеры говорят о важности этих понятий.

15.1. Сонаправленность лучей

Два луча a и b называются **сонаправленными,** если они перпендикулярны некоторой плоскости α и лежат с одной стороны от нее (рис. 120). Из этого определения и теоремы о параллельности перпендикуляров (п. 7.1) следует, что *сонаправленные лучи лежат либо на одной прямой и тогда один из них содержит другой* (рис. 121, *а*), *либо они лежат на параллельных прямых и тогда они лежат с одной стороны от прямой, проходящей через их начала* (рис. 121, *б*).

Для сонаправленных лучей a и b употребляется обозначение $a\uparrow\uparrow b$.

Основной признак сонаправленности лучей выражает следующая лемма:

Лемма *(о сонаправленности лучей).* ***Два луча, сонаправленные с третьим лучом, сонаправлены.***

Доказательство. Пусть лучи a и b сонаправлены с лучом c. Покажем, что a и b сонаправлены. Так как $a\uparrow\uparrow c$, то они перпендикулярны некоторой плоскости α и лежат с одной стороны от α. Аналогично b и c перпендикулярны некоторой плоскости β и лежат с одной стороны от β. Так как α и β перпендикулярны одной прямой, на которой лежит луч c, то $\alpha\parallel\beta$ (рис. 122).

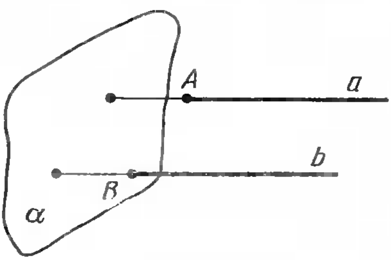


Рис. 120

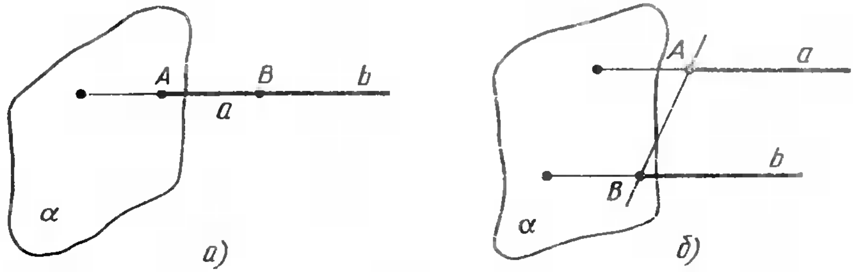


Рис. 121

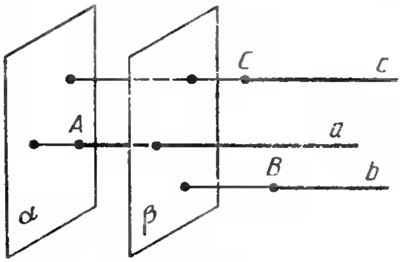


Рис. 122

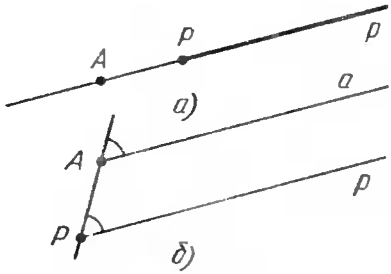


Рис. 123

Пусть плоскость α удалена от начала луча c дальше, чем плоскость β. Тогда все лучи a, b, c лежат с одной стороны от плоскости α и все перпендикулярны ей (по теоремам § 7 о параллельности перпендикуляров и о параллели к перпендикуляру). Поэтому лучи a и b сонаправлены. Лемма доказана.

Если даны луч p и точка A, то из точки A можно провести единственный луч q, сонаправленный с лучом p.

В этой планиметрической задаче надо рассмотреть два случая:

1) Точка A и луч p лежат на одной прямой.

2) Точка A и луч p не лежат на одной прямой.

В первом случае один из этих лучей содержит другой (рис. 123, *а*). Во втором случае эти лучи лежат на параллельных прямых с одной стороны от прямой, проходящей через их начала (рис. 123, *б*).

15.2. Угол между лучами

Угол между сонаправленными лучами полагается равным $0°$.

Если лучи p и q не сонаправлены и имеют общее начало, то угол между ними определяется как величина плоского угла со сторонами p и q.

Наконец, в общем случае, когда лучи p и q не сонаправлены и имеют различные начала, поступают так: из любой точки O проводят лучи p' и q', сонаправленные соответственно с

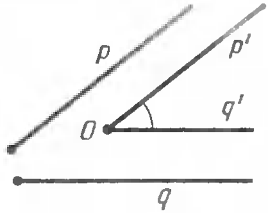


Рис. 124

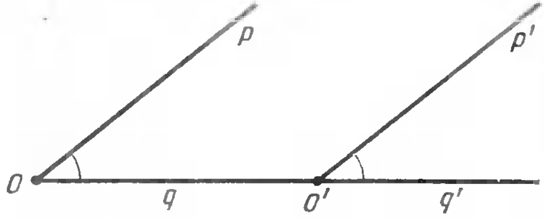


Рис. 125

лучами p и q (рис. 124). Углом между p и q называется величина угла между p' и q'.

Величина такого угла не зависит от выбора точки O. Это вытекает из следующей леммы:

Лемма *(об углах с сонаправленными сторонами).* ***Углы, стороны которых соответственно сонаправлены, равны.***

Доказательство. Пусть даны два угла с вершинами в точках O и O' и с соответственно сонаправленными сторонами: $p \uparrow\uparrow p'$ и $q \uparrow\uparrow q'$. В частном случае, когда у этих углов есть стороны, лежащие на одной прямой, утверждение леммы вытекает из равенства соответственных углов при параллельных прямых, пересеченных третьей прямой (рис. 125).

Поэтому рассмотрим общий случай (рис. 126), когда стороны углов не лежат на одной прямой.

Отложим на сонаправленных сторонах этих углов равные отрезки: $OA = O'A'$ на p и p', а также $OB = O'B'$ на q и q'. Проведем отрезки OO', AA', BB', AB и $A'B'$. Так как $OA = O'A'$ и $OA \parallel O'A'$, то четырехугольник $OAA'O'$ — параллелограмм. Поэтому $OO' = AA'$ и $OO' \parallel AA'$. Аналогично $OO' = BB'$ и $OO' \parallel BB'$. Поэтому $AA' = BB'$ и $AA' \parallel BB'$, т. е. четырехугольник $AA'B'B$ — параллелограмм. Следовательно, $AB = A'B'$.

Итак, в треугольниках OAB и $O'A'B'$ соответственные стороны равны. Но тогда в них равны и соответственные углы. Итак, $\angle AOB = \angle A'O'B'$, т. е. $\angle(p, q) = \angle(p', q')$. Лемма доказана.

Теперь становится ясно, что если даны два луча p и q и

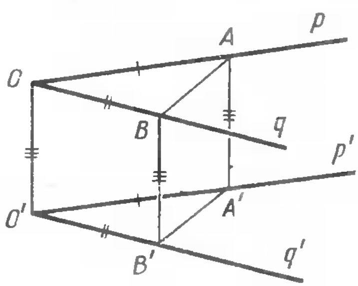


Рис. 126

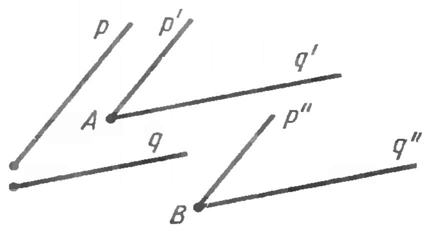


Рис. 127

из разных точек A и B проведены сонаправленные с ними лучи p', q' и p'', q'' (рис. 127), то по лемме о сонаправленности лучей (п. 15.1) $p' \uparrow\uparrow p''$ и $q' \uparrow\uparrow q''$, а по доказанной в этом пункте лемме $\angle(p', q') = \angle(p'', q'')$. Об этом и говорилось при определении угла между лучами p и q.

Угол между лучами p и q обозначается так: $(\widehat{p, q})$.

15.3. Угол между прямыми

Теперь мы можем определить угол между двумя прямыми в пространстве.

Углом между прямыми называется меньший из двух углов между лучами, параллельными этим прямым (рис. 128).

Из данного определения следует, что угол между параллельными прямыми равен нулю.

В том случае, когда прямые пересекаются, угол между ними равен величине вертикальных не тупых углов, образованных этими прямыми.

Если же прямые скрещиваются, то, чтобы найти угол между ними, можно поступить так: через любую точку провести прямые, параллельные данным, и найти угол между этими прямыми (рис. 129).

В частности, мы можем теперь говорить о взаимно перпендикулярных скрещивающихся прямых, лучах и отрезках, если угол между ними равен $90°$ (отрезки взаимно перпендикулярны, если они лежат на взаимно перпендикулярных прямых).

При таком расширении понятия перпендикулярности прямых, лучей и отрезков остаются справедливыми доказанные ранее теоремы, в которых перпендикулярность рассматривалась лишь для пересекающихся прямых, лучей и отрезков: признак перпендикулярности прямой и плоскости (п. 6.1) и теорема о трех перпендикулярах (п. 13.4).

В дальнейшем мы будем применять эти теоремы именно в этом более широком смысле. Так, например, прямая a перпендикулярна плоскости α, если она перпендикулярна любым двум пересекающимся прямым, лежащим на этой плоскости. Эти прямые прямую a могут и не пересекать.

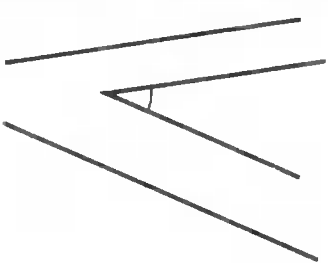


Рис. 128

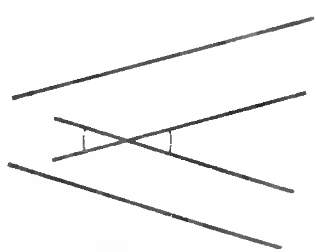


Рис. 129

Задачи к § 15

Основные задачи

15.1. а) Прямая a перпендикулярна плоскости α, прямая b лежит в плоскости α. Докажите, что $a \perp b$. б) Прямая a параллельна плоскости α, прямая b перпендикулярна плоскости α. Докажите, что $a \perp b$. в) Проверьте утверждение, обратное б).

15.2. Прямая a, лежащая в плоскости α, перпендикулярна прямой b, наклонной к этой плоскости. Докажите, что прямая a перпендикулярна проекции прямой b на плоскость α. Докажите обратное. Объясните, почему это утверждение является обобщением теоремы о трех перпендикулярах.

15.3. Даны две плоскости. К каждой из них проводится перпендикулярная ей прямая. Докажите, что угол между этими прямыми не зависит от их выбора.

* * *

15.4. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Вычислите угол φ, который образует луч AD с лучами: а) CC_1; б) A_1B_1; в) B_1C; г) BC_1; д) CD_1; е) A_1B; ж) DB_1; з) D_1B; и) CA_1; к) AC_1.

15.5. Все ребра правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равны. Рассмотрим лучи BC, A_1C, C_1B, AB_1, A_1B_1. Выберите любые два из них и вычислите угол между ними.

15.6. Прямая перпендикулярна двум сторонам треугольника. Объясните, почему она будет перпендикулярна третьей его стороне. Как обобщить это утверждение?

15.7. Нарисуйте куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. а) Сколько пар перпендикулярных прямых вы можете насчитать на рисунке? б) Нарисуйте несколько прямых, перпендикулярных прямой AB и проходящих через точку C_1. в) Нарисуйте несколько прямых, перпендикулярных прямой B_1C и проходящих через точку A. г) Нарисуйте несколько прямых, перпендикулярных прямой A_1C и проходящих через точку A.

15.8. Нарисуйте прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Проведите отрезки AC, BD, A_1C, A_1C_1. Укажите на этом рисунке прямые, перпендикулярные: а) AA_1; б) BD; в) AC; г) AB_1; д) B_1D_1; е) A_1C.

15.9. Равнобедренный треугольник ABC вращают вокруг основания AB. Точки K и L — два положения его вершины. Докажите, что $AB \perp KL$. Верно ли это для треугольника, не являющегося равнобедренным?

15.10. Нарисуйте правильную пирамиду $PABC$. Точка Q — центр ее основания. Проведите отрезок PQ. а) Сколько пар перпендикулярных прямых вы можете насчитать на рисунке? б) Нарисуйте несколько прямых, перпендикулярных прямой BC. в) Нарисуйте несколько прямых, перпендикулярных прямой PQ. г) Нарисуйте несколько прямых, перпендикулярных прямой AQ и не лежащих в плоскости основания.

15.11. Точка A не лежит на прямой a. Какую фигуру образуют все прямые, проходящие через точку A и перпендикулярные прямой a?

15.12. Вычислите угол между скрещивающимися диагоналями граней куба. (Рассмотрите два случая.)

15.13. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Точка K — середина ребра AA_1, точка L — середина ребра A_1D_1, точка M — середина ребра A_1B_1, точка N — середина ребра B_1C_1, точка P — середина ребра BB_1, точка Q — середина ребра BC, точка R — середина ребра C_1D_1, точка S — середина ребра DD_1. Вычислите углы между: а) KL и MN; б) KL и PQ; в) MP и NQ; г) KL и RS; д) RS и PQ. Выберите сами любую пару прямых, определенную данными точками, и вычислите угол между ними.

15.14. Пусть $PABC$ — правильный тетраэдр, точка Q — центр его основания, точка K — середина ребра PB, точка L — середина ребра AC. Вычислите угол φ между прямыми: а) AP и BC; б) AP и CQ; в) AP и CK; г) AK и BC; д) AK и PL.

§ 16. УГЛЫ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ И МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ

16.1. Угол между прямой и плоскостью

Мы уже подробно изучили два важнейших случая расположения прямой и плоскости: перпендикулярность прямой и плоскости и их параллельность.

Если прямая перпендикулярна плоскости, то она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости. Поэтому естественно считать, что **угол между взаимно перпендикулярными прямой и плоскостью равен 90°.**

Если же прямая параллельна плоскости (или лежит в ней), то угол между ними считается равным 0°.

Рассмотрим общий случай, когда прямая a пересекает плоскость α, но не перпендикулярна ей (рис. 130), т. е. случай прямой, наклонной к плоскости.

В этом случае, характеризуя их взаимное расположение, часто указывают, насколько прямая отклонилась от перпендикуляра к плоскости. Например, в оптике говорят об угле падения луча света на плоскую поверхность, т. е. об угле между прямой и перпендикуляром (нормалью) к данной плоскости (рис. 131). Но в геометрии, оценивая наклон прямой к плоскости, чаще рассматривают не этот угол, а угол, дополняющий его до 90°. Дается следующее определение:

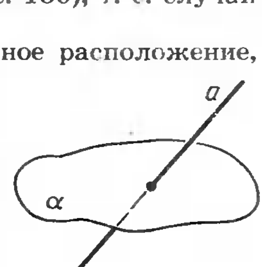


Рис. 130

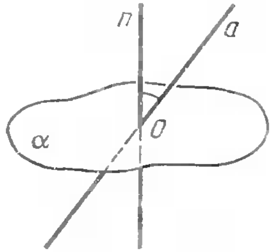


Рис. 131

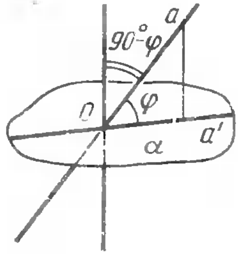


Рис. 132

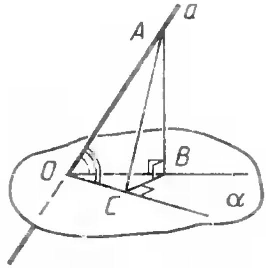


Рис. 133

Углом между плоскостью и не перпендикулярной ей прямой называется угол между этой прямой и ее проекцией на данную плоскость (рис. 132).

Это определение исключает случай, когда прямая перпендикулярна плоскости: в этом случае проекцией на плоскость является точка. Если же прямая параллельна плоскости, то ее проекцией будет прямая, параллельная данной прямой, т. е., как говорилось, угол между прямой и плоскостью в этом случае равен 0°.

Угол между прямой и плоскостью обладает следующим свойством: *он является наименьшим среди всех углов, которые данная прямая образует с прямыми, лежащими в данной плоскости*. Докажите это свойство самостоятельно. Идея доказательства показана на рисунке 133 ($AB < AC$, следовательно, $\sin \widehat{AOB} < \sin \widehat{AOC}$).

16.2. Двугранный угол

Представление о двугранных углах дают двускатные крыши домов, приоткрытые двери и т. п. (рис. 134), т. е. фигуры, образованные двумя полуплоскостями, имеющими общую границу. Соответственно этому и дается определение: фигура, образованная в пространстве двумя полуплоскостями, имеющими общую граничную прямую и не лежащими в одной плоскости, называется **двугранным углом** (рис. 135). Сами полуплоскости называются **гранями двугранного угла**, а их общая гранич-

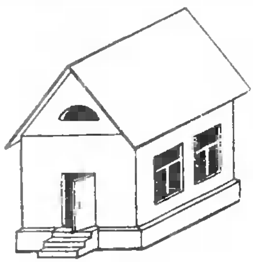


Рис. 134

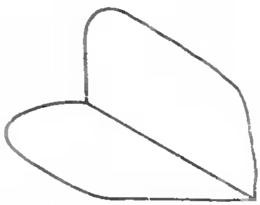


Рис. 135

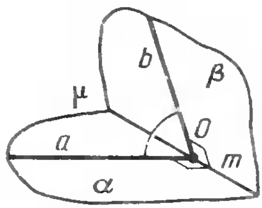


Рис. 136

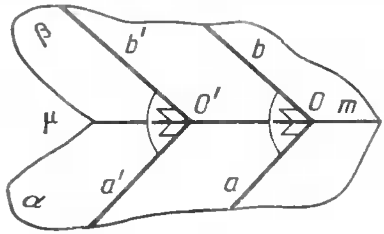


Рис. 137

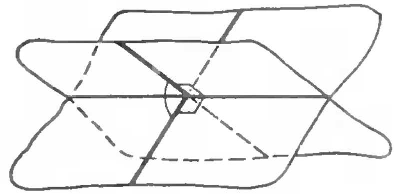


Рис. 138

ная прямая — его ребром. Двугранным углом называют и часть пространства, ограниченную двумя полуплоскостями.

Измеряют двугранные углы следующим образом. Возьмем на ребре m двугранного угла μ с гранями α и β точку O. Проведем из точки O в его гранях лучи a и b, перпендикулярные ребру m: a в грани α и b в грани β (рис. 136). Построенный плоский угол со сторонами a и b называется **линейным углом двугранного угла** μ.

Все линейные углы данного двугранного угла равны, так как их стороны сонаправлены (объясните почему, рис. 137). Поэтому **величиной двугранного угла называется величина любого из его линейных углов.**

Если величина двугранного угла равна $90°$, то он называется **прямым.** Плоскости граней прямого двугранного угла перпендикулярны друг другу. Это следует из определения перпендикулярности плоскостей.

Отсюда следует, что если при пересечении двух плоскостей один из четырех образованных ими двугранных углов прямой, то и остальные три прямые.

Угол между плоскостями определяется так. Если плоскости пересекаются, то углом между ними называется величина наименьшего из образованных ими двугранных углов (рис. 138). Угол между параллельными плоскостями полагается равным $0°$.

Задачи к § 16

Задачи к п. 16.1

Основные задачи

16.1. Из точки A провели на плоскость α перпендикуляр AB и наклонную AC. Пусть их длины известны. Как вычислить угол между AC и α? Приведите численные примеры. Составьте для этой ситуации аналогичные задачи.

16.2. Прямая b лежит в плоскости α, а прямая a пересекает α в некоторой точке прямой b. Пусть прямая a_1 — проекция a на α. Тогда

$$\cos \angle(a, b) = \cos \angle(a, a_1) \cdot \cos \angle(a_1, b).$$

Какие следствия отсюда можно получить? Как эту формулу можно обобщить?

Решение. Пусть прямые a, a_1 и b проходят через точку $O \in \alpha$ (рис. 139, *а*). Построим прямоугольные треугольники с заданными углами. Для этого спроектируем любую точку $A \in a$ $(A \neq 0)$ на плоскость α, а затем полученную точку A_1 спроектируем на прямую b и получим точку B (рис. 139, *б*). На основании теоремы о ближайшей точке точка B — проекция точки A на прямую b. (Все это можно было бы обосновать, сославшись на теорему о трех перпендикулярах.)

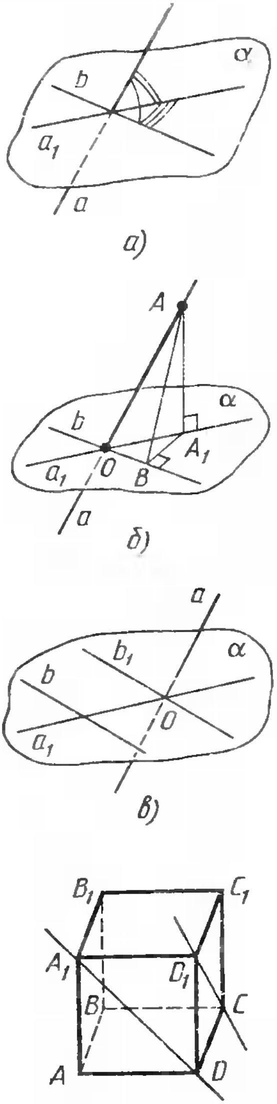


Рис. 139

Теперь

$$\angle(a, \ b) = \angle AOB, \quad \angle(a, \ a_1) = \angle AOA_1,$$
$$\angle(a_1, b) = \angle A_1OB.$$

Из треугольника AOA_1 имеем:

$$\cos \angle AOA_1 = \frac{OA_1}{OA}. \qquad \text{(а)}$$

Из треугольника A_1OB имеем:

$$\cos \angle A_1OB = \frac{OB}{OA_1}. \qquad \text{(б)}$$

Из треугольника AOB имеем:

$$\cos \angle AOB = \frac{OB}{OA}.$$

Перемножим равенства (а) и (б), получим:

$$\cos \angle AOA_1 \cdot \cos \angle A_1OB = \frac{OA_1}{OA} \cdot \frac{OB}{OA_1} =$$
$$= \frac{OB}{OA} = \cos \angle AOB,$$

что и требовалось.

Получили формулу, предположив, что прямые a_1 и b не являются перпендикулярными. Проверьте, будет ли верна формула в случае, когда $a_1 \perp b$.

Перейдем к следствиям из формулы. Из нее можно выразить $\cos \angle(a, a_1)$ или $\cos \angle(b, a_1)$. Особенно важно в дальнейшем выражение для $\cos \angle(a, a_1)$, так как оно даст возможность вычислять угол между прямой и плоскостью.

С помощью этой формулы можно, например, решить задачу 13.2 значительно проще. Убедитесь в этом!

Как обобщение этой формулы можно рассмотреть случай, когда прямые a и b скрещиваются. Тогда проведем прямую $b_1 \parallel b$ через точку O (рис. 139, *в*). Так как $\angle(a, b) = \angle(a, b_1)$ и $\angle(a_1, b) = \angle(a_1, b_1)$, то формула остается верной и в этом случае. Теперь по этой формуле можно вычислять угол между скрещивающимися прямыми. При удачном выборе плоскости α искомый угол вычисляется очень быстро. Пусть, например, нам нужно вычислить угол φ между прямыми, проходящими через скрещивающиеся диагонали соседних граней куба (рис. 139, *г*). Согласно полученной формуле

$$\cos \angle((D_1C), (A_1D)) = \cos \angle CD_1D \cdot \cos \angle D_1DA.$$

(Здесь в качестве плоскости α взята плоскость грани AA_1D_1D.)

Отсюда получаем:

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}, \text{ значит } \varphi = 60^\circ.$$

Наконец, эта формула может быть применена для вычисления углов не только между прямыми, но и между лучами. Напомним, что угол между лучами может быть тупым, а угол между прямыми нет. Подумайте, как обосновать применимость этой формулы для вычисления угла между лучами.

* * *

16.3. Прямая a пересекает плоскость α. На a взят отрезок d. Проекцией d на α является отрезок d_1. Запишите зависимость величины угла между a и α от длины отрезков d и d_1. Приведите численные примеры. Составьте для этой ситуации аналогичные задачи. (У к а з а н и е. Рассмотрите разные положения отрезка d относительно α.)

16.4. а) На прямой, наклонной к плоскости α, взяли два отрезка и спроектировали их на α. Докажите, что отношение проекций равно отношению самих отрезков. б) Составьте задачу, аналогичную а) для отрезков, взятых на двух прямых.

16.5. а) Из точки A проводят к плоскости α равные наклонные. Докажите, что все они образуют с α одинаковые углы. б) Из точки A проводят к плоскости α разные по длине наклонные. Докажите, что бо́льшая из них образует с α меньший угол.

16.6. а) Докажите, что параллельные прямые образуют с одной и той же плоскостью равные углы. б) Проверьте утверждение, обратное а).

16.7. а) Докажите, что прямая образует с параллельными плоскостями равные углы. б) Проверьте утверждение, обратное а).

16.8. Прямая a перпендикулярна плоскости α. Известен угол между прямыми a и b. Найдите угол между b и α.

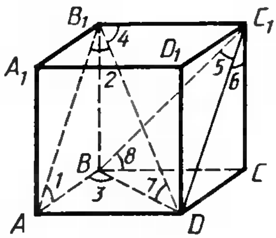


Рис. 140

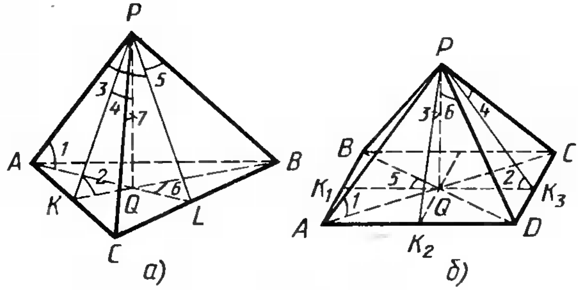


Рис. 141

16.9. На рисунке 140 изображен прямоугольный параллелепипед. Каждый занумерованный угол запишите как угол прямой с плоскостью.

16.10. а) На рисунке 141, *а* изображена правильная пирамида $PABC$. Точки K, L — середины сторон основания. Точка Q — центр основания. Каждый занумерованный угол запишите как угол прямой с плоскостью. б) На рисунке 141, *б* изображена правильная пирамида $PABCD$. Точки K_1, K_2, K_3 — середины сторон основания, точка Q — центр основания. Каждый занумерованный угол запишите как угол прямой с плоскостью.

16.11. Треугольник ABC равносторонний, его сторона AC лежит в плоскости α, а сторона AB образует с α угол φ. Как найти угол, который образует с α медиана к стороне: а) AC; б) BC? Приведите численный пример. Решите обратную задачу. Составьте аналогичную задачу для равнобедренного треугольника.

16.12. Вернитесь к задаче 9.12. Вычислите угол, который образует с плоскостями квадратов: а) прямая D_1D_2; б) прямая D_1C_2; в) прямая KL, где K — середина D_1C_1, а L — середина D_2C_2.

16.13. Вернитесь к задаче 9.13. Вычислите углы между: а) (AC) и (ABD); б) (BD) и (ABC); в) (AC) и (CKD).

16.14. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Точка K — центр грани AA_1B_1B, точка L — середина ребра B_1C_1. 1) Вычислите углы, которые образуют с гранями куба прямые: а) DC_1; б) DB_1; в) DK; г) DL. 2) Вычислите углы, которые образуют с плоскостью AB_1C_1 прямые: а) A_1D; б) A_1C; в) AC; г) B_1D_1; д) CB_1. 3) Вычислите углы, которые образуют с плоскостью BDC_1 прямые: а) A_1D; б) B_1D.

16.15. В правильной n-угольной пирамиде ($n=3;4$) высота равна стороне основания. Вычислите угол, который составляет с плоскостью основания: а) боковое ребро; б) апофема (апофема правильной пирамиды — высота на боковой грани, проведенная из вершины пирамиды); в) перпендикуляр из некоторой точки высоты пирамиды на ее боковое ребро;

г) перпендикуляр из некоторой точки высоты пирамиды на ее боковую грань.

16.16. Отрезок AB имеет длину 1 и упирается концами в две перпендикулярные плоскости α и β, причем $A \in \alpha$, $B \in \beta$, угол между AB и α равен φ_1, а угол между AB и β равен φ_2. Найдите длину проекции отрезка AB на каждую из плоскостей α и β.

16.17. Из наблюдательного пункта установили, что расстояние до самолета увеличивается, а угол, под которым он виден над горизонтом, уменьшается. Взлетает этот самолет или снижается? Решите задачу: а) если расстояние увеличилось в 1,5 раза, а угол над горизонтом уменьшается с 60° до 45°; с 60° до 30°; б) в общем виде.

16.18. В течение солнечного дня вы наблюдаете за тенью от дерева. Как изменяется ее длина?

Задачи к п. 16.2

Основные задачи

16.19. Докажите, что угол между плоскостями равен углу между прямыми, перпендикулярными к этим плоскостям.

16.20. Биссектральной плоскостью двугранного угла называется плоскость, которая делит его на два равных по величине двугранных угла. Докажите, что биссектральная плоскость двугранного угла состоит из точек, равноудаленных от плоскостей его граней.

* * *

16.21. Пусть $ABCD$ и $CDLK$ — два квадрата, а угол MTP — линейный угол двугранного угла при ребре CD. Есть ли ошибка на рисунке 142?

16.22. а) Какой из занумерованных на рисунке 140 углов в прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вы можете записать как линейный угол некоторого двугранного угла в этом параллелепипеде?

б) На рисунке 143 изображен правильный тетраэдр $PABC$. Точки K_1, K_2, K_3 — середины его ребер. Точка Q — центр осно-

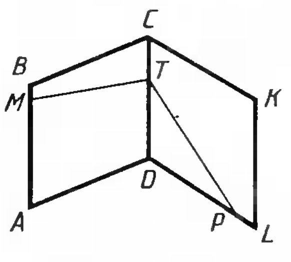


Рис. 142

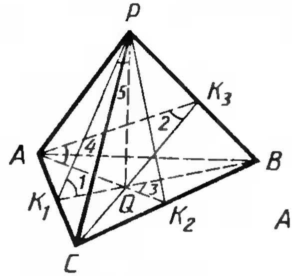


Рис. 143

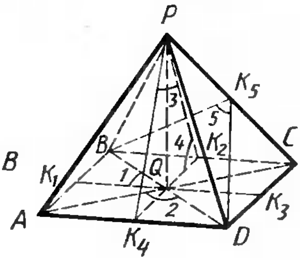


Рис. 144

вания. Какой из занумерованных углов вы можете записать как линейный угол двугранного угла в этом тетраэдре?

16.23. На рисунке 144 изображена пирамида $PABCD$, все ребра которой равны. Точки K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 — середины ребер пирамиды, точка Q — центр ее основания. Запишите каждый занумерованный угол как линейный угол двугранного угла.

16.24. Нарисуйте два прямоугольника с общей стороной. Нарисуйте несколько линейных углов двугранного угла, образованного плоскостями этих прямоугольников.

16.25. Нарисуйте линейный угол двугранного угла, образованного плоскостью: а) равнобедренного треугольника ABC ($BA=BC$) и плоскостью его проекции AB_1C, проходящей через AC; б) прямоугольного треугольника ABC ($\angle A=90^\circ$) и плоскостью его проекции AB_1C, проходящей через AC (B_1 — проекция точки B).

16.26. Пусть $PABC$ — правильный тетраэдр. Нарисуйте линейные углы двугранных углов при: а) AC; б) AP.

16.27. В пирамиде $PABCD$ все ребра равны. Нарисуйте линейные углы двугранных углов: а) при ребре AD; б) при ребре PD; в) между плоскостями граней PAD и PBC.

16.28. Плоскости α и β перпендикулярны плоскости γ. Докажите, что угол между α и β равен углу между прямыми, по которым α и β пересекают плоскость γ.

16.29. Плоскости α и β пересекаются по прямой p. Угол между ними равен φ. Точка $A\in\alpha$. а) Как, зная $|Ap|$ и φ, вычислить $|A\alpha|$? Приведите численный пример. Составьте другие задачи для этой же ситуации. Приведите численные примеры. б) Пусть теперь $B\in\beta$. Докажите, что равенство $|A\beta|=|B\alpha|$ равносильно равенству

$$|Ap|=|Bp|.$$

16.30. а) Стороны основания прямой треугольной призмы 2, 3, 4. Вычислите углы между ее боковыми гранями. б) Обобщите задачу а).

16.31. Две боковые грани прямой треугольной призмы перпендикулярны, а третья составляет с одной из них угол φ. а) Какой угол она составляет с другой гранью? б) Пусть наибольшее ребро основания призмы равно 1. Чему равны остальные ребра основания? Найдите расстояние от ребра прямого двугранного угла до плоскости противолежащей грани.

16.32. Три плоскости α, β и γ пересекаются по трем параллельным прямым. Плоскость β образует с α и γ угол φ. Найдите угол между α и γ.

16.33. Две вершины A и B треугольника ABC лежат в плоскости α. Как найти угол φ между плоскостью ABC и плоскостью α, зная, что $|C\alpha|=d_1$ и: а) треугольник ABC равносторонний со стороной d; б) треугольник ABC прямоугольный равнобедренный с гипотенузой d, причем: 1) $\angle C=90°$; 2) $\angle A=90°$; в) треугольник ABC прямоугольный с гипотенузой d, причем: 1) $\angle C=90°$ и $\angle A=30°$; 2) $\angle A=90°$ и $\angle B=30°$?

16.34. Вернитесь к задаче 9.12. Какой угол образуют с плоскостями квадратов плоскости: а) $C_1D_1D_2$; б) D_1C_2K, где K — середина D_1C_1; в) AC_1C_2? Какой угол образуют плоскости AC_1C_2 и BD_1D_2?

16.35. Вернитесь к задаче 9.13. Вычислите углы между плоскостями: а) ACD и ABD; б) ACD и DKC; в) ACD и BCD.

16.36. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Вычислите углы, образованные плоскостями: а) AB_1C_1 и ABC; б) BB_1D_1 и AA_1C; в) DA_1C_1 и BA_1C_1.

16.37. Дан правильный тетраэдр. Вычислите угол, образованный: а) плоскостями граней тетраэдра; б) плоскостью, проходящей через ребро и высоту тетраэдра, и плоскостью боковой грани.

16.38. В треугольной пирамиде $PABC$ ребро PB перпендикулярно грани ABC. Треугольник ABC равносторонний. Как найти угол между плоскостями: а) PAB и PBC; б) PAC и BAC; в) PAC и PBC?

16.39. Пусть $PABCD$ — четырехугольная пирамида, в основании которой квадрат, и ребро PB перпендикулярно основанию. Как найти угол между плоскостями: а) PAB и ABC; б) PAD и ABC; в) PCD и ABC; г) PAB и PBC; д) PAD и PCD; е) PAD и PCB; ж) PAB и PCD?

16.40. Вычислите угол между биссекторами двух смежных двугранных углов, образованных пересекающимися плоскостями. (Биссектор двугранного угла — это лежащая внутри него часть биссектральной плоскости этого угла.)

16.41. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, через сторону BC проводится сечение под углом φ к основанию. Выразите площадь сечения как функцию от φ. Вычислите площадь сечения при $\varphi=30°, 45°, 60°$.

16.42. Дан двугранный угол, отличный от прямого. На его ребре выбрали точку. Может ли прямой угол иметь вершину в этой точке, а стороны на гранях данного двугранного угла?

16.43. Как вычислить угол подъема лестницы?

§ 17. СФЕРА И ШАР

17.1. Определения сферы и шара

Каждый из нас хорошо представляет себе шар, так как форму шара имеют многие предметы: футбольный мяч, мыльный пузырь, шарики из подшипника и т. д. (рис. 145). Поверхность шара называют в геометрии сферой. Сфера и шар определяются в стереометрии точно так же, как окружность и круг в планиметрии.

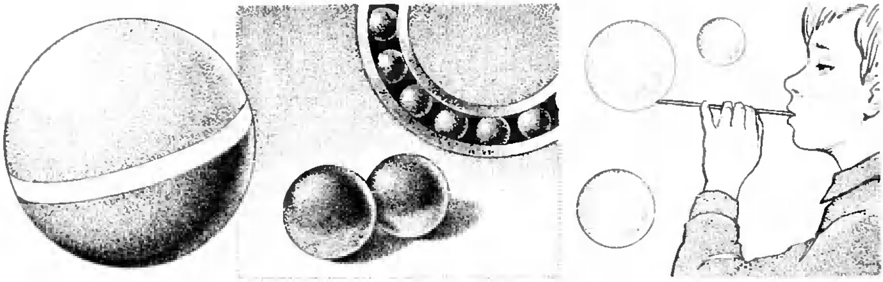


Рис. 145

Сферой называется фигура, состоящая из всех точек пространства, удаленных от данной точки на одно и то же (положительное) расстояние. Эта точка называется **центром сферы,** а расстояние — ее **радиусом.**

Иначе говоря: сфера с центром O и радиусом R — это фигура, образованная всеми точками X пространства, для которых $OX = R$ (рис. 146).

Шаром называется фигура, образованная всеми точками пространства, находящимися от данной точки на расстоянии, не большем некоторого данного (положительного) расстояния. Эта точка называется **центром шара**, а данное расстояние — его радиусом.

Это можно сформулировать и так: шар с центром O и радиусом R — это фигура, образованная всеми точками X пространства, для которых $OX \leqslant R$.

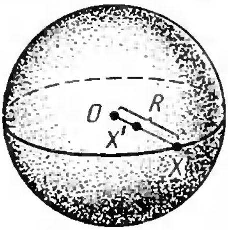


Рис. 146

Радиусом сферы и шара называют не только расстояние R, но и любой отрезок, соединяющий центр с точкой сферы. **Диаметром сферы (и шара)** называют как величину, равную удвоенному радиусу, так и любой проходящий через центр отрезок с концами на сфере (рис. 147). Точки сферы, являющиеся концами диаметра, называются **диаметрально противоположными.**

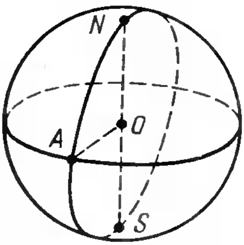


Рис. 147

▲ 17.2. Сфера и шар как множества точек

Определения сферы и шара можно сформулировать, пользуясь понятием множества или геометрического места точек.

Сферой называется множество (геометрическое место) точек пространства, уда-

ленных от данной точки на данное (положительное) расстояние.

Шаром называется множество (геометрическое место) точек пространства, удаленных от данной точки не более чем на данное (положительное) расстояние.

Говорить «множество» предпочтительнее. Во-первых, это короче. Во-вторых, что самое главное, термин «множество» употребляется не только в геометрии, но и во всей математике вообще: говорят не только о множестве точек, но и о множестве чисел, множестве функций, множестве решений уравнения и т. д.

Подчеркнем, что, говоря «множество точек», мы всегда имеем в виду множество всех точек с указанным свойством. Поэтому слово «всех» в приведенных определениях сферы и шара отсутствует.

Если множества M и N совпадают — представляют одно и то же множество, то это записывают как равенство: $M=N$.

Пересечением двух фигур — двух множеств — называется множество их общих точек. Пример пересечения двух фигур — сечение фигуры плоскостью. Если общих точек у двух фигур нет, то говорят, что их **пересечение пусто**, является **пустым множеством.**

Объединением двух фигур — двух множеств — называется множество точек обеих фигур, т. е. точек, принадлежащих хоть одной из данных фигур. Пример: двугранный угол можно рассматривать как объединение двух полуплоскостей с общей границей. Еще пример: шар с центром O и радиусом R можно рассматривать как объединение сферы — множества точек X, для которых $OX=R$,— и внутренности шара — множества точек X, для которых $OX<R$.

Понятия пересечения и объединения множеств, естественно, обобщаются на любое число множеств.

В заключение добавим, что идея фигуры как геометрического места точек пришла к нам из древнегреческой математики. Термин «множество» и связанные с ним понятия стали употреблять в математике лишь в последнее столетие. ▼

17.3. Взаимное расположение шара и плоскости

Сначала вспомним, как могут быть расположены по отношению друг к другу круг и прямая. Три положения круга и прямой характеризуются расстоянием от центра круга до прямой.

1. $|Oa|=|OA|>R$ — нет общих точек (рис. 148, *а*).

2. $|Oa|=|OA|=R$ — единственная общая точка — прямая касается круга (рис. 148, *б*).

3. $|Oa|=|OA|<R$ — общий отрезок (рис. 148, *в*).

Точно так же в пространстве для шара и плоскости возможны три случая.

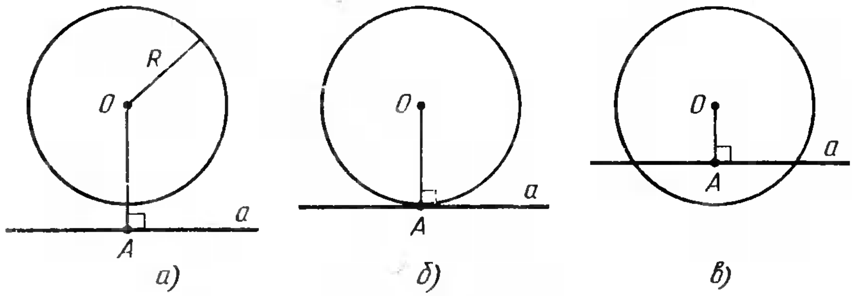


Рис. 148

1. *Шар и плоскость не имеют общих точек* (рис. 149, *а*). Такое их положение характеризуется тем, что расстояние от центра шара до плоскости больше радиуса шара ($|O\alpha| = |OA| > R$).

2. *Шар и плоскость имеют единственную общую точку* (рис. 149, *б*) — плоскость касается шара — расстояние от центра шара до плоскости равно радиусу R.

3. *Шар и плоскость имеют общий круг* (рис. 149, *в*) — расстояние от центра шара до плоскости меньше радиуса.

Докажем эти утверждения. Пусть точка O — центр шара, R — его радиус, точка A — проекция точки O на данную плоскость α, так что $|O\alpha| = |OA|$. Величину $|O\alpha| = |OA|$ обозначим через d.

1. $|O\alpha| = d > R$ (рис. 150). Тогда для любой точки X плоскости α

$$|XO| \geqslant d > R.$$

Отсюда следует, что на плоскости α нет точек шара.

2. $|O\alpha| = d = R$ (рис. 151), т. е. $|OA| = R$. Так как перпендикуляр OA короче всякой наклонной, то для любой точки X плоскости α, отличной от A,

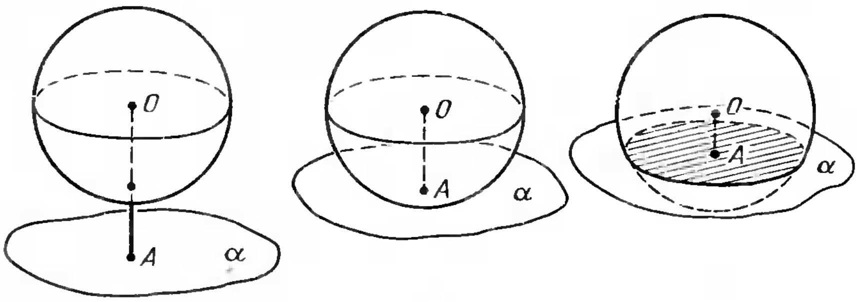


Рис. 149

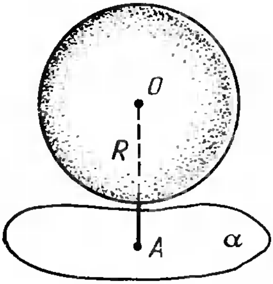


Рис. 150

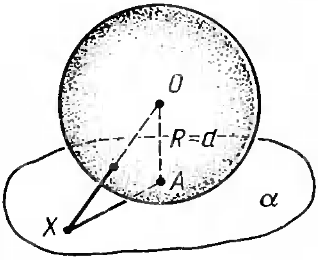


Рис. 151

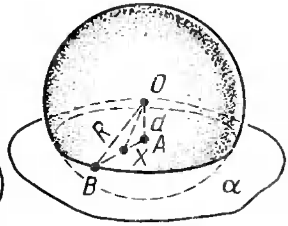


Рис. 152

$$|XO| > R.$$

Поэтому на плоскости α лежит только одна точка шара — точка A.

3. $|O\alpha| = d < R$ (рис. 152). Мы докажем, что пересечение шара и плоскости α — круг в плоскости α с центром в точке A и радиусом $r = \sqrt{R^2 - d^2}$. Иначе говоря, надо доказать совпадение двух множеств: первое из них — множество общих точек шара и плоскости; второе — указанный круг.

Для этого надо доказать два утверждения:

1) Каждая общая точка шара и плоскости принадлежит указанному кругу.

2) Каждая точка указанного круга является общей точкой шара и плоскости.

Докажем первое из них. Пусть точка X — общая для шара и плоскости, причем не совпадает с A. Для нее выполняется равенство $OX^2 = OA^2 + AX^2 = d^2 + AX^2$. Так как X лежит в шаре, то $OX \leqslant R$, а значит, $OX^2 \leqslant R^2$. Поэтому $d^2 + AX^2 \leqslant R^2$. Отсюда получаем, что $AX^2 \leqslant R^2 - d^2$ или $AX \leqslant \sqrt{R^2 - d^2}$. Последнее неравенство и означает, что точка X лежит в круге с центром A и радиусом $\sqrt{R^2 - d^2}$.

Докажем второе утверждение. Пусть теперь точка X лежит в указанном круге, т. е. в круге на плоскости α с центром в точке A и радиусом $\sqrt{R^2 - d^2}$. Для того чтобы она оказалась общей для шара и плоскости, достаточно доказать, что она лежит в шаре, т. е. установить для нее неравенство $|OX| \leqslant R$. Вы сможете проделать это самостоятельно, проведя выкладки из первого доказательства в обратном порядке.

Заметим, что наше доказательство предполагает, что плоскость α не проходит через центр шара. В случае, когда она проходит через его центр, утверждение остается верным, в чем вы легко можете убедиться сами.

Рассуждения о пересечении сферы с плоскостью проводятся аналогично, только вместо неравенств появляются равенства. Убедитесь в этом самостоятельно!

Результат, доказанный в третьем случае, сформулируем как теорему.

Теорема *(о пересечении шара с плоскостью).* ***Если расстояние от центра шара до плоскости меньше радиуса шара, то пересечение шара с плоскостью представляет собой круг.***

17.4. Касательная плоскость сферы

Если плоскость имеет со сферой (и ограниченным ею шаром) единственную общую точку, то говорят, что она **касается** этой **сферы** или что сфера касается этой плоскости. Их единственная общая точка называется **точкой касания.**

Теорема *(о касании сферы и плоскости).* ***Плоскость, касающаяся сферы, перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.*** Обратно: ***если плоскость проходит через точку сферы и перпендикулярна радиусу, проведенному в эту точку, то она касается сферы.***

Короче, плоскость касается сферы тогда и только тогда, когда она имеет со сферой общую точку и перпендикулярна радиусу, проведенному в эту точку.

Доказательство. Сказанное в теореме непосредственно следует из результатов предыдущего пункта. Действительно, как показано в случае 2, плоскость имеет с шаром единственную общую точку тогда и только тогда, когда перпендикуляр, опущенный на нее из центра шара,— это радиус. (Всякая же другая плоскость либо не имеет со сферой общих точек, либо пересекает ее по окружности.) ■

Плоскость, касающаяся сферы, называется **касательной плоскостью** этой **сферы.** Отметим, что сфера имеет общую точку с такой плоскостью и лежит от нее по одну сторону, т. е. в одном полупространстве. Плоскости, обладающие таким свойством относительно некоторой фигуры (необязательно сферы), называются **опорными плоскостями** этой фигуры.

17.5. Опорная плоскость

Итак, плоскость называется **опорной плоскостью данной фигуры,** если она имеет с фигурой хотя бы одну общую точку и фигура содержится в одном полупространстве, ограниченном этой плоскостью (рис. 153).

Мы постоянно встречаемся с опорными плоскостями (насколько вообще можно говорить о реальных плоских поверхностях как о плоскостях). Плоскость стола является опорной для всех стоящих на нем предметов; для предмета, упирающегося и в пол и в стену, их поверхности служат опорными плоскостями; для детали, обрабатываемой на шлифовальном круге, поверхность этого круга тоже служит опорной плоскостью и т. д.

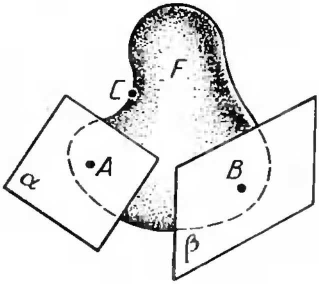


Рис. 153

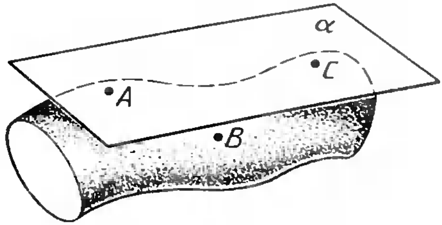


Рис. 154

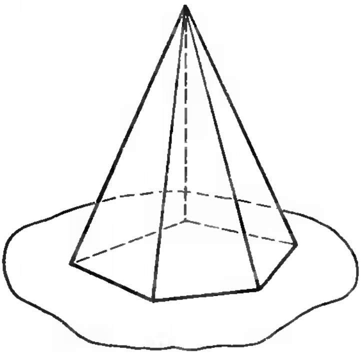


Рис. 155

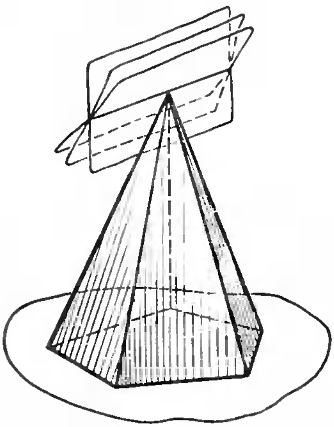


Рис. 156

Плоскость может быть опорной одновременно в разных точках фигуры, как на рисунке 154, и на целой области: так, плоскость основания пирамиды является ее опорной плоскостью во всех точках основания (рис. 155).

С другой стороны, может быть так, что в одной точке фигура имеет бесконечно много опорных плоскостей, как это будет, например, в вершине пирамиды (рис. 156).

17.6. Свойства сферы. Изображение сферы

Пусть S — сфера с центром O радиусом R и α — некоторая плоскость. Если расстояние d от центра O до плоскости α меньше R, то, как показано в п. 17.3, плоскость α пересекает сферу S по окружности радиусом $r=\sqrt{R^2-d^2}$. Радиус r будет наибольший, когда $d=0$, т. е. когда плоскость α проходит через центр. Тогда $r=R$. Поэтому окружность, по которой сфера пересекается с плоскостью, проходящей через ее центр, называется **большой окружностью сферы.**

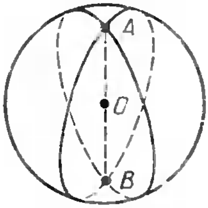


Рис. 157

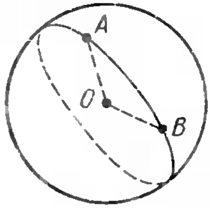


Рис. 158

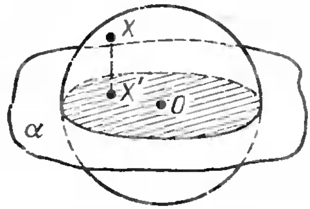


Рис. 159

Каждые *две большие окружности одной сферы пересекаются в двух диаметрально противоположных точках* (как это доказать?).

На глобусе экватор представляет собой большую окружность. Меридианы — это полуокружности больших окружностей с концами в двух диаметрально противоположных точках, соответствующих Северному и Южному полюсам. Прямая, проходящая через полюсы, перпендикулярна плоскости экватора.

Параллели — это окружности, по которым поверхность глобуса пересекает плоскости, перпендикулярные прямой, проходящей через полюсы.

Через любые две диаметрально противоположные точки сферы проходят большие окружности, которые получаются при пересечении сферы с плоскостями, проходящими через эти точки (рис. 157). *А через любые две не диаметрально противоположные точки сферы проходит единственная большая окружность, которая получается при пересечении сферы с плоскостью, проходящей через центр сферы и две данные точки* (рис. 158).

Ортогональная проекция шара, как и сферы, есть круг того же радиуса.

Действительно, если плоскость проекции проходит через центр шара, то проекцией этого шара на плоскость является большой круг, по которому плоскость пересекает шар (вы это легко докажете сами, рис. 159). Если же плоскость проекции

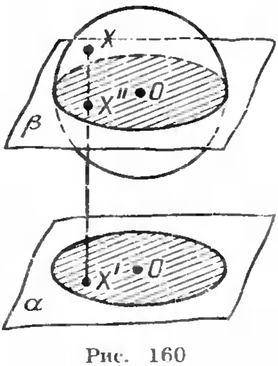


Рис. 160

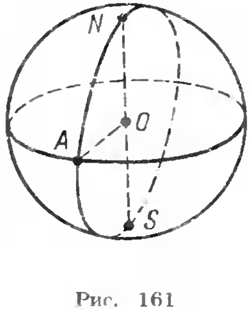


Рис. 161

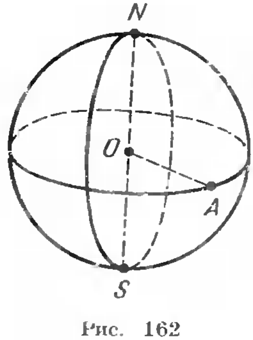


Рис. 162

не проходит через центр данного шара, то проекцией шара на эту плоскость будет круг, равный большому кругу (рис. 160).

Поэтому шар и сферу изображают в виде круга. При этом, чтобы отличить изображение шара от изображения круга, обычно в изображении шара рисуют проекцию какой-нибудь большой окружности. Проекция эта будет, как мы знаем, эллипсом (рис. 161). Если взятая большая окружность принята за экватор, то полюсы изображаются как на рисунке 161 (на рисунке же 162 изображение неверное! При таком положении полюсов экватор изображался бы отрезком, объясните почему). Параллели и меридианы также изображаются эллипсами.

Сфера описана около многогранника, если она проходит через все его вершины. В этом случае говорят, что **многогранник вписан в сферу.**

Сфера вписана в многогранник, если она касается всех его граней. В этом случае говорят, что **многогранник описан около сферы**.

Задачи к § 17

Задачи к п. 17.1, 17.2, 17.6

Основная задача

17.1. Две сферы имеют единственную общую точку. Установите зависимость между радиусами и расстоянием между их центрами.

* * *

17.2. Каков самый длинный отрезок, умещающийся в шаре?

17.3. Дан шар с центром O и радиусом R. а) Чему равна длина хорды (отрезка, соединяющего две точки сферы), если она видна из центра под углом $30°$, $120°$, φ? б) Пусть длина хорды равна d. На каком расстоянии от центра она находится? Под каким углом она видна из центра?

17.4. Докажите, что в одном и том же шаре: а) равные хорды равноудалены от центра (и обратно); б) чем больше хорда, тем ближе она к центру (и обратно); в) чем больше хорда, тем больше угол, под которым она видна из центра (и обратно).

17.5. Какую фигуру образуют середины равных хорд одного шара?

17.6. Точка A лежит на сфере радиусом R. От конца B диаметра BC она удалена на расстояние d. На каком расстоянии она находится от конца C?

17.7. Точки A и B принадлежат сфере радиусом R. Докажите, что отрезок AB лежит в шаре, ограниченном этой сферой.

17.8. Дан шар с центром O радиусом R. Пусть a — некоторая прямая. Докажите, что если: а) $|Oa| < R$, то a имеет две общие точки со сферой; б) $|Oa| = R$, то a имеет одну общую точку со сферой; в) $|Oa| > R$, то a не имеет общих точек со сферой. Проверьте обратные утверждения.

17.9. Дан шар с центром O радиусом R. а) Найдите расстояние от точки A до этого шара, если $|OA| = d$. б) Найдите расстояние до этого шара от прямой a, если $|Oa| = d$.

Изменятся ли эти результаты, если шар заменить сферой?

17.10. Существует ли точка, кроме центра сферы, которая удалена от всех точек сферы на одно и то же расстояние?

17.11. Какая фигура состоит из точек X, таких, что: а) $1 < |OX| < 2$; б) $1 \leqslant |OX| \leqslant 2$? (Точка O — фиксированная точка пространства.)

17.12. AB — диаметр сферы. $|AB| = 6$. Точка X такова, что $|XA| = 3$, $|XB| = 5$. Принадлежит ли она шару? А если $|XA| = 4$?

17.13. Отрезок соединяет внутреннюю точку шара с точкой вне шара. Докажите, что он имеет единственную общую точку со сферой этого шара.

17.14. В большой круг шара вписан правильный треугольник. Из некоторой точки все его стороны видны под прямым углом. Лежит ли она в шаре?

17.15. Из одной точки сферы выходят равные хорды. а) Докажите, что они образуют равные углы с диаметром, выходящим из той же точки. б) Проверьте обратное утверждение. в) Какую фигуру образуют другие концы этих хорд? их середины?

17.16. Из некоторой точки рассматривают шар. Какой его диаметр виден под наименьшим углом? а под наибольшим?

17.17. Дан шар с центром O радиусом R. а) Две его хорды длиной d имеют общий конец. Чему равен наибольший угол между ними? б) Две его равные хорды образуют между собой угол φ и имеют общий конец. Чему равна наибольшая их длина?

17.18. Рассмотрим на сфере фиксированную сетку меридианов и параллелей. а) Сколько меридианов проходит через данную точку сферы? б) Сколько параллелей проходит через данную точку сферы? в) Сколько общих точек имеют два меридиана? г) Через каждую ли точку на сфере проходит меридиан? параллель? д) Как расположены плоскости двух меридианов? двух параллелей? меридиана и параллели? е) Может ли длина параллели равняться длине меридиана? быть больше, чем длина меридиана? ж) Могут ли меридианы иметь разную длину? з) Для каждой ли параллели есть параллель с той же длиной? с большей длиной? с меньшей длиной? и) Для каждой ли параллели найдется такая параллель, у которой длина будет в два раза меньше? в два раза больше?

17.19. Найдите длину шестидесятой параллели Земли. Во сколько раз она длиннее такой же параллели на Луне? Могли бы вы ответить на этот вопрос, ничего не вычисляя?

17.20. Муравей ползет по сфере. Сначала он прополз по меридиану вниз, затем по параллели вправо, затем по меридиану вверх. Длина каждого из этих участков пути одна и та же. Может ли он оказаться там, где был вначале?

Задачи к п. 17.3

Основные задачи

17.21. В шаре с центром O провели круговое сечение с центром O_1. Докажите, что прямая OO_1 перпендикулярна плоскости сечения.

17.22. На реальном шаре устанавливают ножку циркуля и постоянным раствором циркуля проводят на шаре замкнутую линию. Докажите, что эта линия — окружность.

17.23. Какой фигурой является пересечение двух сфер?

* * *

17.24. В шаре радиусом 2 провели сечение радиусом 1. а) На каком расстоянии оно находится от центра шара? б) Какой угол оно составляет с радиусом шара, проведенным в точку сечения, лежащую на сфере?

17.25. В шаре радиусом 2 провели сечение. Чему равен его радиус, если оно: а) удалено от центра на 1; б) составляет угол 45° с радиусом, проведенным в точку сечения, лежащую на сфере?

17.26. Дан шар. Докажите, что в нем: а) равные сечения равноудалены от центра (и обратно); б) большее сечение ближе к центру (и обратно). Какую фигуру образуют центры равных сечений шара?

17.27. Сколько равных сечений шара можно провести через: а) данную точку шара; б) данную хорду шара?

17.28. Через данную точку проводятся сечения шара. Какие из них будут иметь наибольшее и наименьшее значения площади, если данная точка находится: а) на сфере; б) внутри шара; в) вне шара?

17.29. На сфере некоторого шара даны две точки. Через них проводятся всевозможные сечения этого шара. Какое из них имеет наибольшую площадь? А наименьшую площадь?

17.30. На сфере дана точка. Сколько можно провести через нее: а) больших окружностей данной сферы; б) окружностей данного радиуса, лежащих на сфере? Решите те же задачи, если на сфере будут даны две точки.

17.31. Сколько общих точек могут иметь две произвольные окружности данной сферы? На сколько частей они могут разбивать сферу? А если на сфере расположить три окружности, то на сколько частей они разобьют сферу?

17.32. а) Шар радиусом R укладывается в круглое отверстие радиусом r. На сколько он углубится в это отверстие? б) Решите аналогичную задачу, если шар радиусом R укладывается в щель с параллельными краями шириной d.

17.33. Нарисуйте две сферы радиусами R_1 и R_2, если расстояние между их центрами равно 6 и: а) $R_1=2$, $R_2=3$; б) $R_1=2$, $R_2=4$; в) $R_1=2$, $R_2=5$; г) $R_1=2$, $R_2=8$; д) $R_1=2$, $R_2=10$. Вычислите длину линии их пересечения.

Задачи к п. 17.4, 17.5

17.34. Шар с центром O радиусом R касается плоскости α в точке A. Точка X лежит на плоскости α. а) Пусть известно $|OX|$. Как вычислить $|XA|$? б) Пусть известно $|XA|$. Как вычислить $|OX|$? Как вычислить расстояние от X до шара? в) Пусть из точки X радиус шара OA виден под углом φ. Как вычислить $|XA|$, $|XO|$, расстояние от X до шара?

17.35. Треугольник ABC равносторонний со стороной 1. Чему равен радиус шара с центром O, касающегося плоскости ABC, если: а) $|OA|=|OB|=|OC|=1$; б) $|OA|=|OB|=|OC|=2$; в) отрезок OA перпендикулярен плоскости ABC и $|OB|=3$; г) плоскости OAB и ABC перпендикулярны и $|OA|=|OB|=2$?

17.36. Шар касается плоскости. Эта фигура проектируется на плоскость, проходящую через радиус шара, проведенный в точку касания. Как выглядит проекция? Сделайте рисунок.

17.37. Две плоскости касаются шара. Эта фигура проектируется на плоскость, проходящую через радиусы, проведенные в точки касания. Как выглядит эта проекция, если: а) плоскости параллельны; б) плоскости пересекаются? Сделайте рисунок.

17.38. Две параллельные плоскости касаются шара радиусом R. Чему равно расстояние между ними?

17.39. Две пересекающиеся плоскости касаются шара радиусом R. Чему равно расстояние от центра шара до их общей прямой, если они: а) перпендикулярны; б) образуют угол 60°; в) образуют угол φ?

17.40. На плоскости лежат два шара радиусом R. Они имеют единственную общую точку. а) На какой высоте над плоскостью находится их общая точка? б) На каком расстоянии друг от друга находятся общие точки этих шаров с плоскостью? в) Найдите радиус наибольшей сферы, которая «пролезает» в зазор между этими шарами и плоскостью. Решите эту задачу, если радиусы шаров R_1 и R_2.

17.41. Две сферы радиусами R_1 и R_2 касаются одной плоскости. Расстояние между их центрами равно d. Найдите расстояние между точками касания этих сфер и плоскости.

17.42. Сколько опорных плоскостей можно провести к данному шару, если они должны проходить через: а) данную точку; б) данную прямую?

17.43. Шар катится по плоскости. Его след на плоскости — отрезок. По какой линии двигался его центр?

17.44. Как ударить биллиардный шар, чтобы он, отразившись от борта один раз, попал в другой шар?

§ 18. СИММЕТРИЯ СФЕРЫ И ШАРА

Одно из самых важных свойств, которым может обладать фигура,— это ее симметричность. Сфера и шар — самые симметричные фигуры (не считая самого пространства). Поэтому, изучая их симметрию, мы и введем необходимые понятия о разных видах симметрии. Мы будем подробно говорить о симметрии сферы, но все сказанное о ней очевидным образом распространяется на шар.

Само слово «симметрия» с греческого может быть переведено как «соразмерность». Симметрия придает вещам известную уравновешенность.

18.1. Сфера — центрально-симметричная фигура

О центральной симметрии говорилось в планиметрии. Все сказанное там повторяется дословно в стереометрии. Напомним основные определения.

Точки A и A' называются симметричными относительно точки O, если она делит отрезок AA' пополам (рис. 163). Точка O считается симметричной сама себе (относительно O).

Две фигуры называются симметричными относительно точки O, если они состоят из попарно симметричных точек, т. е. если для каждой точки одной фигуры есть симметричная ей точка в другой фигуре и обратно (рис. 164). В частности, фигура может быть симметрична сама себе относительно некоторой точки O. Это значит, что для каждой ее точки X в ней есть точка X', симметричная X относительно O. Точка O называется тогда **центром симметрии фигуры,** а фигура — **центрально-симметричной** (рис. 165).

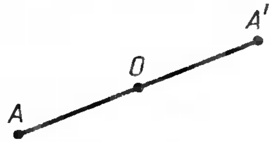


Рис. 163

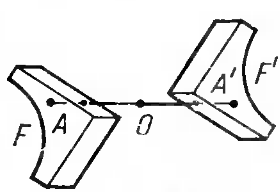


Рис. 164

Сфера симметрична относительно своего центра, т. е. он является ее центром симметрии. В самом деле, каждой точке X сферы соответствует сим-

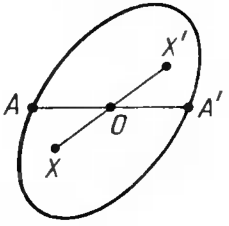


Рис. 165

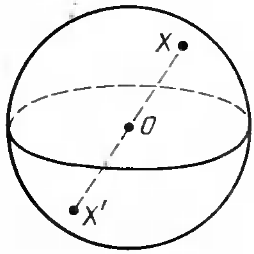


Рис. 166

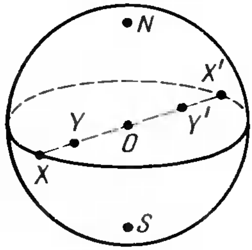


Рис. 167

метричная — это диаметрально противоположная точка X' (рис. 166).

Шар тоже имеет центр симметрии — его центр. У шара точками, симметричными относительно центра, являются точки, лежащие на одном диаметре на равных расстояниях от центра (рис. 167).

18.2. Сфера — зеркально-симметричная фигура

В планиметрии уже говорилось об **осевой симметрии** (или о симметрии относительно прямой). Напомним, что в планиметрии точки X и X' называются **симметричными относительно прямой** a, если отрезок XX' перпендикулярен ей и делится ею пополам (рис. 168). Каждая точка прямой a считается симметричной сама себе (относительно a). Затем, как и в случае центральной симметрии, определяются фигуры, имеющие **ось симметрии** (рис. 169).

Эти же определения используются и в пространстве (рис. 170). К осевой симметрии в пространстве мы еще вернемся в § 20 как к повороту вокруг прямой на 180°. А сейчас по аналогии с осевой симметрией на плоскости мы определим **зеркальную симметрию** в пространстве.

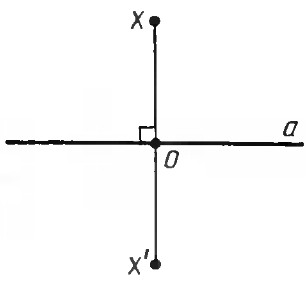


Рис. 168

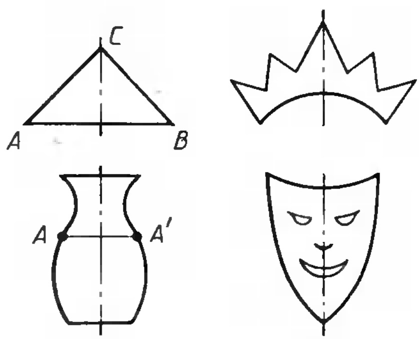


Рис. 169

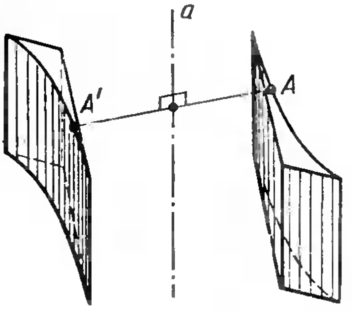


Рис. 170

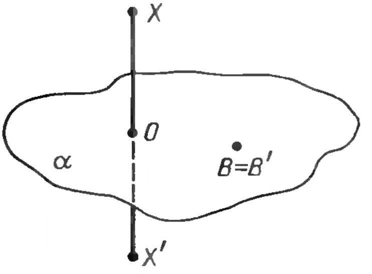


Рис. 171

Точки X и X' называются симметричными относительно плоскости α, если отрезок XX' перпендикулярен α и делится ею пополам (т. е. α проходит через середину отрезка XX', рис. 171). Каждая точка плоскости α считается симметричной сама себе (относительно α).

Фигура F называется симметричной относительно плоскости α, если для каждой ее точки X в ней есть точка X', симметричная X относительно α (рис. 172). Плоскость α называется тогда **плоскостью симметрии** фигуры F или **плоскостью зеркальной симметрии.**

Сфера симметрична относительно любой плоскости, проходящей через ее центр (рис. 173). Другими словами, каждая плоскость, проходящая через центр сферы, является ее плоскостью зеркальной симметрии.

Это означает следующее. Пусть S — некоторая сфера радиусом R с центром в точке O и α — любая плоскость, проходящая через O. Возьмем любую точку X сферы S, не лежащую в α. Тогда найдется такая точка $X' \in S$, что плоскость α перпендикулярна отрезку XX' и пересекает его в середине.

Действительно, опустим из точки X перпендикуляр XY на плоскость α и продолжим его за точку Y на отрезок $YX' = XY$. Прямоугольные треугольники OXY и $OX'Y$ равны (по двум катетам). Поэтому $OX' = OX = R$ и точка $X' \in S$.

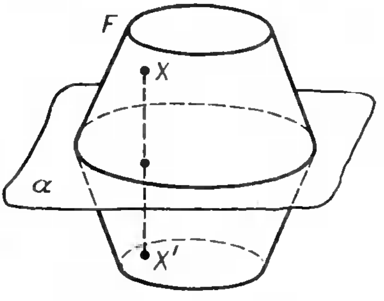


Рис. 172

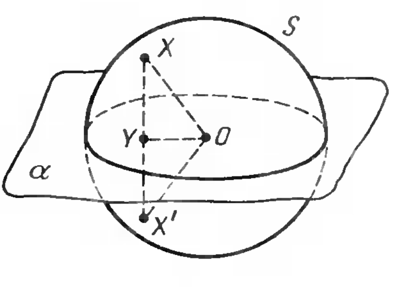


Рис. 173

Проверьте, что шар, как и сфера, симметричен относительно любой плоскости, проходящей через его центр.

Симметричные тела встречаются повсюду: чайники, чашки, ложки, автомобили, дома, корабли, тела животных (хотя их внутреннее строение не вполне симметрично).

18.3. Сфера — фигура вращения

Предметы, имеющие форму фигур вращения, постоянно встречаются в технике, в искусстве, в быту: тарелки, круглые стаканы, катушки, колеса, вазы и т. д. (рис. 174) — все это реальные тела вращения. Они характеризуются тем, что при вращении вокруг оси самосовмещаются, как точильные круги, валы турбин и т. п. При этом каждая точка этих фигур, не лежащая на оси вращения, движется по окружности с центром на оси. Поэтому такие фигуры как бы состоят из окружностей, которые имеют центры на одной прямой — оси фигуры вращения — и все лежат в плоскостях, перпендикулярных этой прямой.

Таким свойством обладает и сфера. Ее осью вращения является любая прямая, проходящая через центр сферы (рис. 175). Это вытекает из теорем о пересечении сферы с плоскостью и о касании сферы и плоскости.

В общем случае фигура вращения так и определяется. Пусть F — некоторая фигура в пространстве и a — некоторая прямая. Фигура F называется **фигурой вращения с осью** a, если вместе с каждой своей точкой X, не лежащей на a, фигура F содержит и всю окружность, которая имеет центр на оси a, проходит через X и лежит в плоскости, перпендикулярной оси a (рис. 176, *а*). Окружности, о которых идет речь в этом определении, называются **параллелями фигуры вращения**.

Рассмотрим сечения фигуры вращения F полуплоскостями, имеющими своей границей ось вращения. Ясно, что фигуры, полученные в пересечении F с такими полуплоскостями, равны (рис. 176, *б*). Соответствующие друг другу точки этих фигур

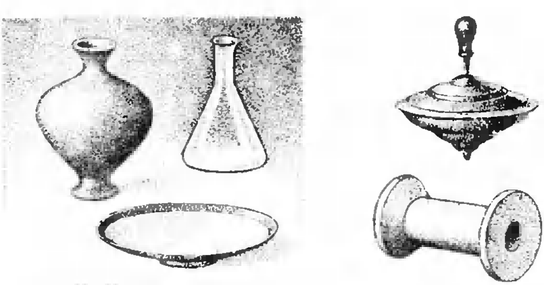


Рис. 174

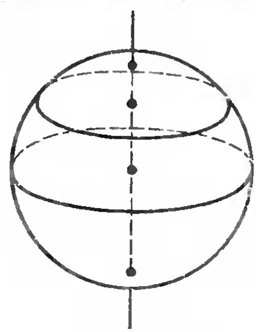


Рис. 175

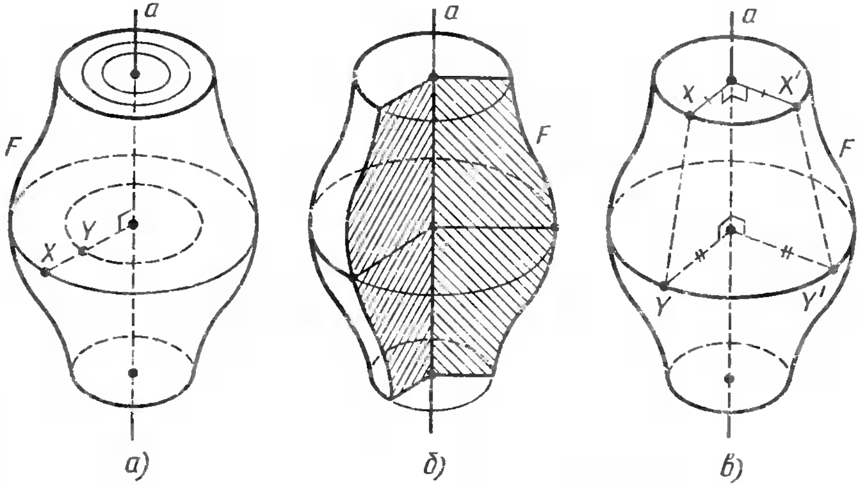


Рис. 176

лежат на одной и той же параллели. Равенство расстояний для соответствующих пар точек следует из равенства прямоугольных трапеций (рис. 176, *в*).

Фигуры, полученные в пересечении фигуры вращения с полуплоскостью, ограниченной осью вращения, называются **меридианами фигуры вращения**. Например, меридиан сферы — это полуокружность.

Если представить себе, что полуплоскости, ограниченные осью фигуры вращения, поворачиваются вокруг этой оси, то все меридианы фигуры вращения будут совмещаться друг с другом при таких поворотах. Поэтому, пользуясь представлением о непрерывном вращении, можно сказать, что фигура вращения получается в результате вращения плоской фигуры вокруг оси, лежащей в той же плоскости.

О фигурах вращения так и говорят: фигура, полученная вращением такой-то плоской фигуры вокруг такой-то оси.

Например, шар получается вращением полукруга вокруг ограничивающего его диаметра, сфера — вращением полуокружности.

▲ 18.4. Преобразования симметрии

Доказывая, что сфера S обладает какой-либо симметрией (например, центральной или зеркальной), мы сопоставляли каждой точке X сферы S некоторую точку $X' \in S$, симметричную точке X (относительно центра или плоскости), т. е. выполняли некоторое преобразование сферы S.

Напомним, что вообще **преобразование фигуры** F состоит

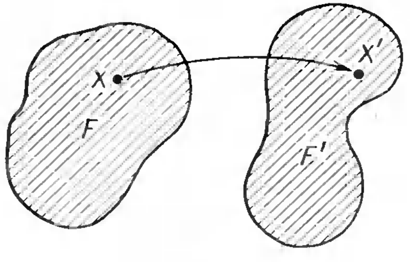


Рис. 177

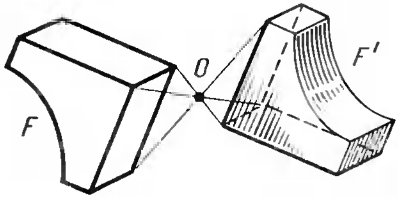


Рис. 178

в том, что каждой ее точке X сопоставляется некоторая точка X' (рис. 177). Все точки X' образуют некоторую фигуру F', и говорят, что фигура F преобразуется в фигуру F'. Говорят также, что точка X' является **образом точки** X, а фигура F' — **образом фигуры** F для данного преобразования. Примером преобразования является проектирование фигуры на плоскость.

Сейчас мы определим несколько преобразований симметрии.

Центральной симметрией фигуры с центром O называется такое преобразование этой фигуры, которое сопоставляет каждой ее точке точку, симметричную относительно O (рис. 178).

Отражением фигуры в плоскости α (или **зеркальной симметрией**) называется такое преобразование, при котором каждой точке данной фигуры сопоставляется точка, симметричная ей относительно плоскости α (рис. 179). (Отражение в плоскости называется также симметрией относительно этой плоскости.)

Наконец, **осевая симметрия** определяется так же, как на плоскости (рис. 180).

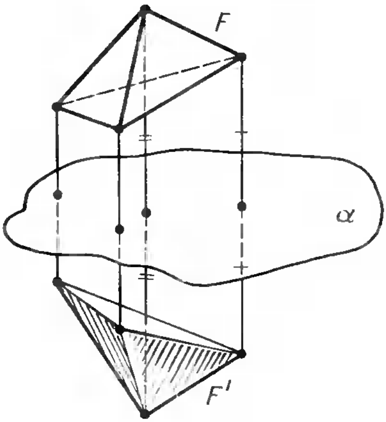


Рис. 179

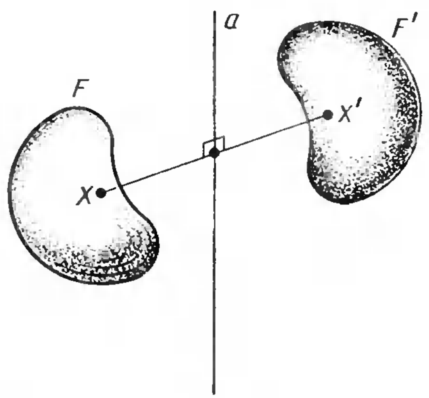


Рис. 180

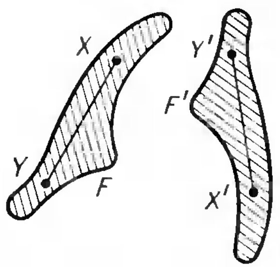


Рис. 181

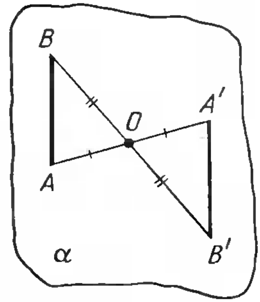


Рис. 182

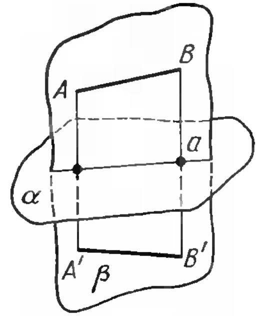


Рис. 183

Все эти преобразования симметрии являются **движениями** (или **перемещениями**). Напомним, что движением (или перемещением) называется преобразование, сохраняющее расстояния. Подробнее: движением (или перемещением) фигуры F называется такое ее преобразование, при котором каждым двум ее точкам X, Y соответствуют такие точки X', Y', что $X'Y' = XY$ (рис. 181).

То, что *центральная симметрия является движением*, доказывается так же, как и в планиметрии (рис. 182). Покажем, что *зеркальная симметрия является движением.*

Действительно, пусть точки A', B' симметричны точкам A, B относительно плоскости α. Отрезки AA', BB' перпендикулярны α, а значит, параллельны. Поэтому они лежат в одной плоскости β (рис. 183). По признаку перпендикулярности плоскостей плоскости α и β перпендикулярны. Они пересекаются по некоторой прямой a. Точки A и A', а также B и B' симметричны в плоскости β относительно прямой a, так как отрезки AA' и BB' перпендикулярны прямой a и делятся ею пополам. В планиметрии же было доказано, что симметрия в плоскости относительно прямой является движением, т. е. сохраняет расстояния. Поэтому $A'B' = AB$, что и требовалось доказать. Итак, отражение в плоскости — движение.

18.5. Отражение в плоскости и отражение в зеркале

Отражение в плоскости осуществляется реально при отражении в зеркале: изображение предмета в плоском зеркале соответствует предмету именно так, как при геометрическом отражении в плоскости зеркала. Это следует из закона отражения света.

По закону отражения света луч падающий и луч отраженный лежат в одной плоскости с перпендикуляром к зеркалу в точке падения и образуют с ним равные углы.

Лучи, идущие из точки A, отражаясь от плоскости зерка-

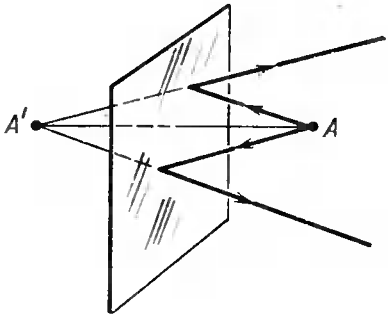


Рис. 184

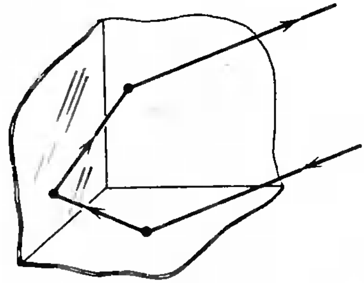


Рис. 185

ла, расходятся так, как если бы они исходили из точки A', симметричной точке A относительно плоскости зеркала. Это можно доказать, исходя из закона отражения (рис. 184).

Таким образом, каждая точка изображается в зеркале симметричной ей точкой и, стало быть, каждая фигура — симметричной фигурой. Отражение в зеркале представляет в этом смысле геометрическое отражение в плоскости.

Отражение в плоскости имеет различные технические применения. Например, можно доказать, что, последовательно отразившись от трех взаимно перпендикулярных плоскостей, луч изменит направление на противоположное (попробуйте доказать это!). Поэтому луч любого направления, отразившись от трех взаимно перпендикулярных зеркал, возвращается точно в противоположном направлении (рис. 185). На этом основан уголковый отражатель, отправленный в свое время на Луну. Из системы таких отражателей состоят красные сигнальные знаки сзади у автомашин и велосипедов. ▼

Задачи к § 18

Основные задачи

18.1. Докажите, что в результате движения: а) отрезок переходит в отрезок; б) прямая переходит в прямую; в) треугольник переходит в треугольник; г) плоскость переходит в плоскость; д) сохраняется расстояние между фигурами; е) сохраняется величина угла.

Р е ш е н и е. Докажем, что при движении отрезок переходит в отрезок. Пусть дан отрезок AB и в результате некоторого движения точка A перешла в точку A_1, а точка B перешла в точку B_1. Тогда отрезок AB перейдет в отрезок A_1B_1. Другими словами, отрезок A_1B_1 есть образ отрезка AB.

Доказательство будет содержать две части: 1. Сначала докажем, что любая точка X отрезка AB в результате движения окажется на отрезке A_1B_1. 2. Затем докажем, что в результате движения точки отрезка AB заполнят весь отрезок A_1B_1, а не какую-либо его часть. Иначе говоря, любая точка отрезка A_1B_1 получается в результате движения из какой-то точки отрезка AB.

1. Пусть $X \in AB$ и в результате движения точка X перешла в точку X_1. Докажем, что $X_1 \in A_1B_1$.

Так как $X \in AB$, то $|AX| + |XB| = |AB|$. В результате движения расстояния не меняются, поэтому

$$|A_1X_1| = |AX|, \ |X_1B_1| = |XB|, \ |A_1B_1| = |AB|.$$

Но тогда оказывается, что $|A_1X_1| + |X_1B_1| = |A_1B_1|$

$$(|A_1X_1| + |X_1B_1| = |AX| + |XB| = |AB| = |A_1B_1|).$$

Это равенство возможно только в том случае, когда $X_1 \in A_1B_1$. Тем самым утверждение 1 доказано.

2. Пусть $Y_1 \in A_1B_1$. Найдем такую точку на отрезке AB, образом которой при движении является точка Y_1. Такой точкой является точка Y отрезка AB, удаленная от A на расстояние, равное $|A_1Y_1|$. В самом деле, в результате движения ее образ окажется на отрезке A_1B_1, как было доказано в первой части. В силу того что расстояния сохраняются, ее образ и будет удален от A_1 так же, как и точка Y_1. В этом рассуждении мы исходили из того, что на AB найдется нужная нам точка Y. Но может быть такой точки на отрезке AB нет? На самом деле она, разумеется, существует, но это требует доказательства. Попробуйте найти его.

Доказав, что при движении отрезок переходит в отрезок, можем установить другие свойства движения. Покажем, например, что треугольник переходит в треугольник. Идея доказательства такова. Пусть в результате движения три вершины треугольника ABC перешли соответственно в точки A_1, B_1, C_1. Тогда стороны треугольника ABC переходят в отрезки A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 и весь треугольник ABC можно представить состоящим из отрезков AX, где X — переменная точка стороны BC. Образы отрезков AX в результате движения и заполнят треугольник $A_1B_1C_1$.

По такой же схеме можно доказать, что образом тетраэдра является тетраэдр.

В заключение рассмотрим какую-либо бесконечную фигуру — проще всего прямую. Прямую можно представить себе как отрезок, продолжающийся в обе стороны. Но отрезок переходит в отрезок, а значит, прямая будет переходить в прямую — такова идея доказательства.

Остальные утверждения задачи докажите самостоятельно, использовав те же идеи доказательства.

18.2. Докажите, что в результате движения сфера переходит в сферу, а шар переходит в шар.

* * *

18.3. Как построить: а) прямую, центрально-симметричную данной; б) плоскость, центрально-симметричную данной; в) прямую, зеркально-симметричную данной; г) плоскость, зеркально-симметричную данной?

18.4. Нарисуйте шар. а) Нарисуйте шар, центрально-симметричный данному относительно середины радиуса. б) Нарисуйте шар, зеркально-симметричный данному относительно плоскости, проходящей через точку внутри шара.

18.5. В результате каких движений переходит в себя: а) полушар; б) часть шара, отрезанная плоскостью; в) часть шара, ограниченная двумя плоскостями, проходящими через один диаметр; г) часть шара, вырезанная из него тремя плоскостями, проходящими через центр, причем каждые две из них перпендикулярны; д) шар, из которого выкололи центр; е) сфера, из которой выкололи точку; ж) общая часть двух равных шаров; з) объединение двух неравных шаров?

18.6. Нарисуйте такие фигуры, которые имеют: а) центр симметрии; б) плоскость симметрии; в) ось симметрии. При этом постарайтесь придумать такие фигуры, которые имеют только этот элемент симметрии.

18.7. Даны два равных шара. Докажите, что один из них может быть получен из другого: а) центральной симметрией; б) зеркальной симметрией; в) осевой симметрией.

18.8. а) Нарисуйте сечение шара. Нарисуйте сечение, ему центрально-симметричное относительно центра шара. б) Даны два равных и параллельных сечения шара. Докажите, что они центрально-симметричны. в) Составьте задачи, аналогичные а) и б) для зеркальной симметрии.

ВЫВОДЫ

1. Теоремы о параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей дают возможность проектировать пространственные фигуры на плоскость. В начале этой главы (в § 12) мы определили ортогональное и параллельное проектирования на плоскость и вывели их основные свойства. Тем самым мы получили возможность сводить решения стереометрических задач к планиметрическим.

2. В этой главе были рассмотрены задачи об измерении двух видов геометрических величин — расстояний и углов. Сначала в § 13 и 14 измерялись расстояния. Расстояние между двумя фигурами — это расстояние между их ближайшими точками.

Напомним, что точка A_1 фигуры F_1 и точка A_2 фигуры F_2 называются **ближайшими точками этих фигур**, если отрезок A_1A_2 является кратчайшим среди всех отрезков, соединяющих точки фигур F_1 и F_2 (п. 14.1). В частности, если фигура F_1 состоит из одной точки A_1, то точка A_2 будет **ближайшей к** A_1 **точкой фигуры** F_2 (п. 13.2).

О ближайшей точке была доказана важная теорема: *точка плоской фигуры является ближайшей к некоторой точке тогда и только тогда, когда эта точка фигуры — ближайшая к проекции данной точки на плоскость фигуры* (п. 13.3).

Частным случаем этой теоремы является теорема о трех перпендикулярах (в этом случае плоской фигурой будет прямая): *прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна наклонной к этой плоскости тогда и только тогда, когда она перпендикулярна к ее проекции* (п. 13.4).

3. **Расстоянием между фигурами** называется расстояние между ближайшими точками этих фигур. *Расстояние между прямыми и плоскостями, не имеющими общих точек, во всех случаях — это длина их общего перпендикуляра* (п. 14.2). Кроме того, *параллельные прямые и плоскости можно охарактеризовать как прямые и плоскости, идущие на постоянном расстоянии друг от друга* (п. 14.3).

4. В этой главе было объяснено, как измерять углы между прямыми и плоскостями в пространстве. Отметим важнейшие случаи.

Угол между пересекающимися прямыми — это величина наименьшего из образованных ими плоских углов. **Угол между скрещивающимися прямыми** — это угол между прямыми, проведенными через любую точку параллельно данным прямым (п. 15.3).

Угол между прямой и плоскостью (если они не перпендикулярны) — это угол между данной прямой и ее проекцией на данную плоскость. Если прямая и плоскость перпендикулярны, то угол между ними равен 90° (п. 16.1).

Двугранным углом называется фигура, состоящая из двух полуплоскостей — **граней двугранного угла** — с общей граничной прямой — **ребром двугранного угла** (п. 16.2).

Выпуклую часть пространства, ограниченную двумя такими полуплоскостями, также называют двугранным углом. *Величина двугранного угла — это величина его линейного угла.* **Линейный угол двугранного угла** — это плоский угол с вершиной на ребре двугранного угла и сторонами, лежащими в его гранях и перпендикулярными его ребру.

Все линейные углы данного двугранного угла равны.

5. Понятие расстояния дает возможность определить сферу и шар.

Сфера — это множество точек пространства, удаленных от данной точки на данное расстояние.

Шар — это множество точек пространства, удаленных от данной точки на расстояние, не большее данного.

Для сферы и шара основными результатами являются теоремы об их пересечении и касании с плоскостью (п. п. 17.3 и 17.4).

Симметрия сферы и шара рассмотрена в § 18.

Задачи к главе III

1. Одна из диагоналей куба с ребром 1 лежит в плоскости α. В каких границах находятся длины его ребер и других диагоналей при проектировании на плоскость α?

2. Параллелограмм лежит с одной стороны от плоскости α. Расстояния от трех его вершин до плоскости α известны. Как вычислить расстояние до α от его четвертой вершины? Как решить задачу, если параллелограмм будет лежать с разных сторон от α?

3. Дан треугольник ABC. Точка K удалена от каждой его вершины на 1, точка L удалена от каждой его стороны на 1. Какая из них ближе к плоскости треугольника?

4. На некоторой высоте над землей произошел взрыв. Его видели и слышали три человека, которые установили, на какой высоте он произошел. Как они это сделали? Смогли бы с этой задачей справиться два человека?

5. На плоскости α лежит угол, равный φ. Точка A не лежит в плоскости α. Известны расстояния от нее до вершины угла и до его сторон. Как найти расстояние от A до плоскости, в которой лежит угол?

6. Два равных круга расположены так, что у них есть единственная общая точка. Из некоторой точки пространства к ним проведены два перпендикуляра. Эти перпендикуляры равны между собой и проходят через центры данных кругов. Докажите, что единственная общая точка этих кругов лежит в одной плоскости с этими перпендикулярами.

7. O_1 и O_2 — центры граней PAC и PBC правильного тетраэдра $PABC$. а) Докажите, что (O_1O_2) равноудалена от плоскостей граней, которым параллельна. б) Как вычислить расстояние O_1O_2? в) Как вычислить расстояние от (O_1O_2) до (KLM), где K — середина AC, L — середина PA, M — середина PB?

8. $a \parallel \alpha$, a_1 — проекция a на α. Докажите, что $|a\alpha| = |aa_1|$.

9. Треугольник ABC равносторонний. Точка A лежит в плоскости α, $BC \parallel \alpha$. а) Пусть сторона треугольника равна 1. В каких границах лежит расстояние от BC до α? б) Пусть известны сторона треугольника и расстояние от BC до α. Как вычислить расстояние до α от центра треугольника?

10. Две вершины параллелограмма лежат в плоскости α. Докажите, что две другие его вершины удалены от плоскости α на одинаковое расстояние. Составьте аналогичную задачу для правильного пятиугольника, шестиугольника, n-угольника.

11. На сторонах AB и CD прямоугольника $ABCD$ построены с одной стороны от его плоскости два равных треугольника AKB и CLD, плоскости которых перпендикулярны плоскости прямоугольника. Как расположены между собой (KL) и (ABC)?

12. Докажите, что диагональ куба составляет с его гранями равные углы. Вычислите этот угол.

13. Дан реальный тетраэдр. Как вычислить угол между его боковым ребром и основанием, если измерения можно проводить только на его поверхности? При этом желательно обойтись наименьшим числом измерений.

14. Отрезок AB имеет длину 1 и упирается концами в две перпендикулярные плоскости α и β, причем точка A лежит в плоскости α, точка B лежит в плоскости β, угол между (AB) и α равен φ_1, угол между (AB) и β равен φ_2. а) Найдите длину проекций отрезка AB на каждую из плоскостей α, β. б) Найдите угол φ между (AB) и прямой пересечения плоскостей.

15. Сторона AB треугольника ABC лежит в плоскости α. Проверьте, что с увеличением угла между (ABC) и α увеличивается угол между стороной треугольника, не лежащей в α, и α. Проверьте обратное.

16. В правильной треугольной пирамиде угол при вершине равен φ. Выразите через него двугранный угол: а) при основании; б) при боковом ребре.

17. Прямая лежит внутри двугранного угла величиной φ и параллельна его граням. Известны расстояния от нее до каждой из граней. Можете ли вы найти расстояние от этой прямой до ребра двугранного угла?

18. Плоскости α и β перпендикулярны. Плоскость γ пересекает каждую из них под углом φ по прямым, угол между которыми равен φ_1. Установите зависимость между φ и φ_1.

19. В правильной треугольной пирамиде угол между боковой гранью и плоскостью основания равен φ. Сторона основания равна 1. Найдите расстояние от: а) вершины пирамиды до основания; б) вершины основания до боковой грани.

20. Имеются два двугранных угла: первый с ребром a и гранями α_1 и α_2; второй с ребром b и гранями β_1 и β_2. а) Пусть $a \parallel b$, α_1 и β_1 пересекаются по прямой p, α_2 и β_2 пересекаются по прямой q. Докажите, что $p \parallel q$. б) Пусть $(\widehat{\alpha_1, \alpha_2}) = \varphi_1$, $(\widehat{\alpha_1, \beta_1}) = \varphi_2$, $(\widehat{\alpha_2, \beta_2}) = \varphi_3$. Найдите $(\widehat{\beta_1, \beta_2})$.

21. Как вычислить величину двугранного угла при ребре тетраэдра, если можно делать замеры только на его поверхности?

22. Дан равносторонний треугольник со стороной d. Центр шара находится в центре этого треугольника, а вершины треугольника лежат на поверхности этого шара. Точка X удалена от каждой вершины треугольника на расстояние d_1. Установите ее положение по отношению к этому шару. Решите задачу, если будет дано, что точка X удалена от каждой стороны треугольника на расстояние d_2. Составьте и решите аналогичную задачу, заменив треугольник квадратом.

23. В большой круг шара радиуса R вписан правильный треугольник. Из некоторой точки все его стороны видны под углом φ. Как расположена эта точка по отношению к шару?

24. Докажите, что центр шара лежит на прямой, проходящей через центры двух круговых его сечений, лежащих в параллельных плоскостях.

25. а) В шаре радиусом R проведено сечение радиусом r. Чему равно расстояние между ним и параллельным ему большим кругом? б) В шаре радиусом 3 проведены два сечения радиусами 1 и 2, плоскости которых параллельны. Вычислите расстояние между ними. в) Составьте обратные задачи.

26. а) Даны два круга одного шара, окружности которых лежат на сфере и имеют единственную общую точку. Докажите, что прямая пересечения плоскостей, в которых лежат эти круги, имеет с шаром единственную общую точку. б) На сфере проведены две окружности, имеющие единственную общую точку. Докажите, что центр сферы, центры обеих окружностей и их общая точка лежат в одной плоскости.

27. а) На сфере радиусом R провели два сечения одинакового радиуса r под углом φ между собой. Они имеют единственную общую точку. Установите зависимость между R, r, φ. б) Сделайте то же, если радиусы сечений r_1 и r_2.

28. а) В шаре радиусом R два сечения радиусами r пересекаются под углом φ. Их пересечением является хорда длиной d. Установите зависимость между R, r, d и φ. б) Сделайте то же, если радиусы сечений r_1 и r_2.

29. Плоскости α и β пересекаются по прямой p. Шар радиусом R_1 касается плоскостей α и β в точках A_1 и B_1, шар радиусом R_2 касается плоскостей α и β в точках A_2 и B_2. Центры шаров — точки O_1 и O_2, сами шары лежат в одном двугранном угле. а) Каково взаимное расположение прямых O_1O_2 и p; A_1A_2 и B_1B_2; A_1B_2 и A_2B_1? б) Пусть угол между плоскостями равен φ, а шары касаются между собой. Чему равны углы между (O_1O_2) и p; (A_2B_1) и α?

ГЛАВА IV.

ЦИЛИНДРЫ И КОНУСЫ. МНОГОГРАННИКИ

§ 19. ЦИЛИНДРЫ

19.1. Определение и общие свойства цилиндров

Слово «цилиндр» часто встречается в технике. Цилиндры обычно представляют себе круглыми, т. е. с круглым основанием. Но в геометрии их можно определить так.

Пусть даны две параллельные плоскости α и α' и на плоскости α задана некоторая фигура F. Представим себе, что из всех ее точек проведены параллельные друг другу отрезки до плоскости α'. Фигура, которую образуют эти отрезки, и называется цилиндром (рис. 186).

Итак, **цилиндром** называется фигура, образованная параллельными отрезками, проходящими от всех точек какой-нибудь плоской фигуры до параллельной ей плоскости. Фигура, из точек которой проводятся отрезки, называется **основанием цилиндра**. Отрезки, образующие цилиндр, так и называются его **образующими**.

Из данных определений вытекают такие свойства:

1. *Все образующие цилиндра не только параллельны, но и равны друг другу* как параллельные отрезки между параллельными плоскостями (согласно лемме п. 14.2).

Концы образующих на плоскости α', параллельной плоскости основания, образуют некоторую фигуру F'. (Можно, конечно, считать, что образующие выходят из нее.) Поэтому и эта фигура может считаться основанием цилиндра. Если, как обычно принято, представлять плоскости оснований горизонтальными, то одно основание называют нижним, а другое — верхним.

2. *Основания цилиндра равны друг другу.*

Действительно, пусть F и F' — основания данного цилиндра C. Каждой точке $X \in F$ соответствует точка X' — конец образующей, проходящей из точки X. Поэтому если точкам X, Y основания F соответствуют точки X', Y' основания F', то отрезки XX' и YY' равны и параллельны (рис. 187). Значит, четырехугольник $XX'Y'Y$ — параллелограмм, а поэтому отрезки XY и $X'Y'$ также равны и параллельны.

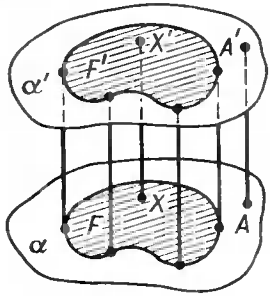


Рис. 186

Равенство отрезков XY и $X'Y'$,

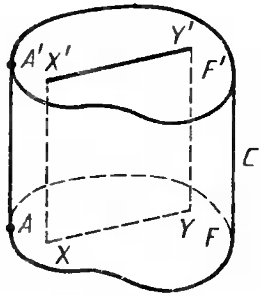


Рис. 187

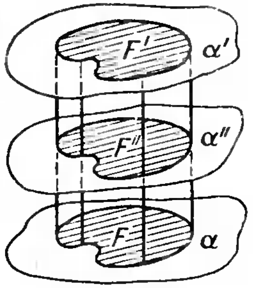


Рис. 188

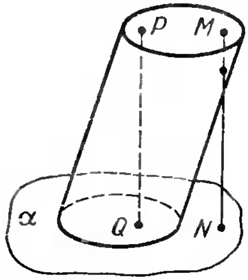


Рис. 189

соединяющих соответствующие точки фигур F и F', означает равенство фигур F и F', что и требовалось доказать.

3. Все сечения цилиндра плоскостями, параллельными плоскостям основания, равны основанию цилиндра. Действительно, любое такое сечение служит основанием цилиндра, отсекаемого от данного плоскостью, параллельной плоскости основания (рис. 188). Поэтому по свойству 2 оно равно основанию данного цилиндра.

Отрезки XY и $X'Y'$ на основаниях не только равны, но и параллельны. Поэтому говорят, что основания F и F' не только равны, но и параллельно расположены.

Перпендикуляр, опущенный из любой точки плоскости одного основания цилиндра на плоскость другого его основания, называется высотой цилиндра (рис. 189). Длина такого перпендикуляра также называется **высотой цилиндра.** Так как плоскости оснований параллельны, то перпендикуляры у них общие и все равны. Поэтому совершенно безразлично, из какой точки плоскости основания проводится высота.

Для того чтобы задать цилиндр, достаточно задать его основание и одну образующую. Все остальные образующие ей равны, параллельны и направлены от плоскости основания в одну сторону. Соответственно цилиндры различаются по виду основания и наклону образующих.

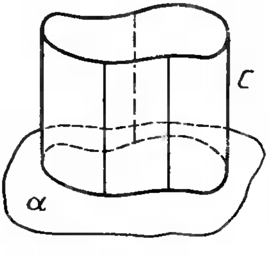


Рис. 190

Цилиндр называется **прямым**, если его образующие перпендикулярны плоскости основания (рис. 190). Для этого достаточно, чтобы одна образующая была перпендикулярна плоскости основания, так как остальные образующие параллельны ей и тоже будут перпендикулярами к плоскости основания.

В прямом цилиндре любая образующая является его высотой. Непрямые цилиндры называются **наклонными.**

▲ 19.2. Замечания об определении цилиндра

1. Свойства цилиндра во многом определяются его основанием.

В определении цилиндра его основание — любая плоская фигура. В частности, она может быть точкой, отрезком, прямой. Какие тогда получаются цилиндры?

2. Цилиндрами называются также фигуры, образуемые не только отрезками, но и параллельными прямыми. Мы такие цилиндры не рассматриваем.

3. Мы определили цилиндр, представляя, что заданы две параллельные плоскости и на одной из них дано основание, а образующие идут из точек основания до другой плоскости параллельно друг другу. При этом образующие оказываются равными. Но можно цилиндр определить и иначе.

Пусть в плоскости α задана фигура F и из всех ее точек проходят в одну сторону (в одно полупространство) от плоскости α равные и параллельные отрезки. Образуемая ими фигура будет цилиндром с основанием F. Концы этих отрезков будут лежать на плоскости, параллельной α (см. задачу 14.19).

Таким образом, цилиндр можно определить как фигуру, образованную равными и параллельными отрезками; эти отрезки проходят в одну сторону от данной плоскости из всех точек фигуры, расположенной в этой плоскости,— основания цилиндра. ▼

19.3. Цилиндр вращения. Симметрия цилиндра вращения

Если основание цилиндра — круг, то цилиндр называется **круговым**. Если к тому же цилиндр прямой, то он, естественно, называется **прямым круговым цилиндром** (рис. 191). Отрезок, соединяющий центры его оснований, называется **осью цилиндра.**

Все сечения прямого кругового цилиндра, параллельные основанию, представляют собой круги с центрами на оси (это следует из равенства и параллельной расположенности сечений). Поэтому *прямой круговой цилиндр является фигурой вращения.* В соответствии с этим прямой круговой цилиндр называют **цилиндром вращения.** Он получается вращением прямоугольника вокруг стороны, а также вращением прямоугольника вокруг оси симметрии (рис. 192). Во втором случае такой прямоугольник является **осевым сечением цилиндра вращения.**

Образующие цилиндра вращения, исходящие из точек окружности основания, образуют его **боковую поверхность.** Она сама является цилиндром, основанием которого служит окружность. Боковая поверхность тоже будет фигурой вращения.

Поверхностью цилиндра вращения называется объединение его основания и боковой поверхности. Поверхность цилиндра

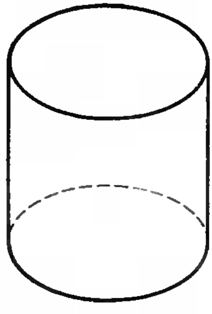


Рис. 191

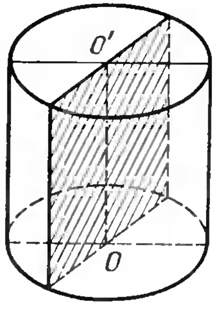


Рис. 192

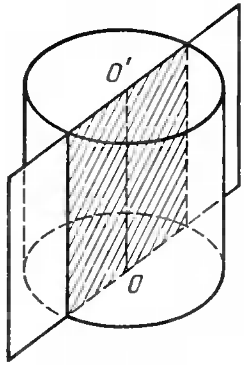


Рис. 193

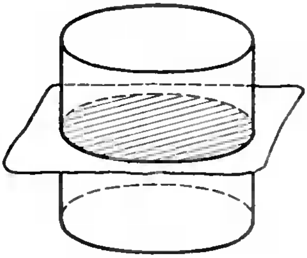


Рис. 194

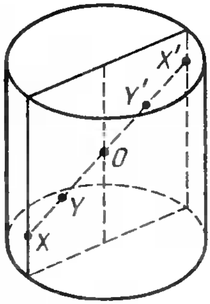


Рис. 195

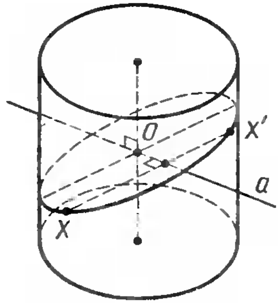


Рис. 196

вращения иногда называют также его **полной поверхностью,** подчеркивая этим, что она состоит из боковой поверхности и двух оснований.

Цилиндр вращения симметричен относительно любой плоскости, проходящей через его ось (рис. 193), а также относительно плоскости, делящей пополам его образующие (рис. 194).

Далее, цилиндр вращения имеет центр симметрии — середину его оси (рис. 195).

Наконец, осями симметрии цилиндра вращения являются его ось вращения, а также все прямые, проходящие через центр цилиндра и перпендикулярные его оси (рис. 196).

▲ 19.4. Цилиндры в практике

Предметы, имеющие более или менее точную форму цилиндра, а также такие, у которых есть цилиндрические формы, встречаются повсеместно: в быту, в строительстве, в технике — и играют важнейшую роль. Оси автомобилей и вагонов,

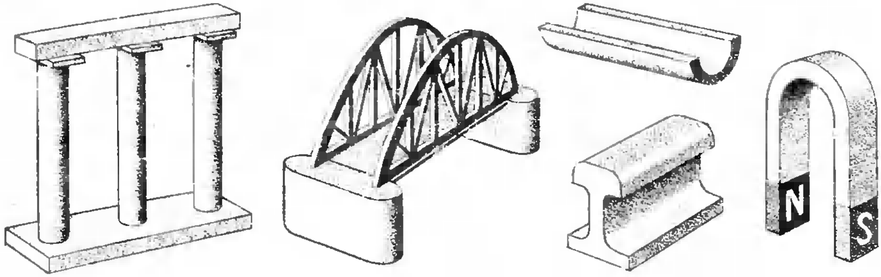


Рис. 197

цилиндры и поршни двигателей и т. д.— все они имеют главные части в виде круговых цилиндров. Стальные трубы представляют собой прямые цилиндры с тонким круговым кольцом в основании.

Под цилиндрами понимают обычно круглые предметы, но если иметь в виду цилиндры в нашем общем смысле, то можно привести множество других примеров. Рельсы, различные виды проката, бетонные желоба и другие изделия имеют разнообразные формы цилиндров (хотя и не круглых). В практике их характеризуют формой перпендикулярного сечения. Колонны, если они не сужаются кверху, столбы и балки в строительных конструкциях имеют форму цилиндров, в частности призм, прямых или наклонных (рис. 197). Например, мостовые фермы составляются сплошь из частей, имеющих форму призм.

В быту в качестве примера цилиндра приводят круглый стакан. Но это не совсем точно. Стакан имеет дно. Если оно ровное, то можно считать, что стакан состоит из двух цилиндров: один представляют его стенки, другой — его дно. Говоря о стакане как о цилиндре (как и о других сосудах), на самом деле имеют в виду форму наполненного сосуда. Чай в круглом стакане — вот пример кругового цилиндра!

Заметим еще, что плоское сечение боковой поверхности цилиндра является эллипсом. Наклонив круглый стакан с водой, вы видите эллипс (рис. 198). ▼

Задачи к § 19

В задачах слово «цилиндр» везде означает «прямой круговой цилиндр», если нет специальных оговорок.

Основные задачи

19.1. Какой фигурой является сечение цилиндра плоскостью: а) параллельной оси; б) перпендикулярной оси?

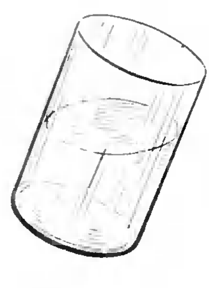


Рис. 198

19.2. Докажите, что около цилиндра можно описать сферу. Это означает, что найдется сфера, на которой лежат окружности двух оснований цилиндра. Цилиндр в таком случае называется вписанным в сферу, а сфера — описанной около цилиндра.

19.3. Говорят, что сфера вписана в цилиндр, если она касается его оснований, а с боковой поверхностью цилиндра имеет общую окружность. Установите, в какой цилиндр можно вписать сферу.

* * *

19.4. Какой фигурой является проекция цилиндра на плоскость: а) параллельную оси; б) перпендикулярную оси?

19.5. Осевое сечение цилиндра — квадрат (такой цилиндр называется равносторонним). а) Сравните его площадь с площадью основания; с площадью квадрата, описанного около основания. б) Во сколько раз площадь осевого сечения больше площади квадрата, вписанного в основание?

19.6. Параллельно оси цилиндра проводятся сечения. Докажите, что: а) сечения, равноудаленные от оси, равновелики; б) из двух сечений то имеет бóльшую площадь, которое ближе к оси.

19.7. Два сечения цилиндра параллельны оси и пересекаются. Как расположен их общий отрезок по отношению к плоскостям оснований?

19.8. Дан цилиндр с радиусом основания R и высотой H. Параллельно его оси проводится сечение цилиндра. Выразите площадь и периметр его сечения как $f(x)$, где x — расстояние от оси цилиндра до плоскости сечения.

19.9. Две пересекающиеся плоскости, опорные к цилиндру с радиусом основания R, проходят через образующие его поверхности. Чему равно расстояние до этих плоскостей от оси цилиндра, если угол между этими плоскостями: а) 90°; б) φ?

19.10. а) Пусть AB — диагональ осевого сечения цилиндра. Докажите, что AB составляет с плоскостями оснований равные углы. б) Пусть A и B — точки окружностей верхнего и нижнего оснований цилиндра. Докажите для них то же самое. в) Диагональ осевого сечения цилиндра равна d и составляет с плоскостью основания угол φ. Каковы размеры цилиндра? г) Пусть точка A принадлежит окружности одного основания цилиндра, а точка B — окружности другого основания. Когда прямая AB составляет с плоскостью основания наибольший угол? наименьший угол?

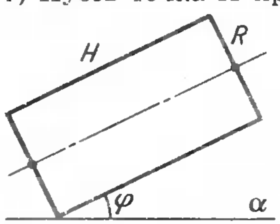


Рис. 199

19.11. Дан цилиндр с радиусом основания R и высотой H. По данным на рисунке 199 установите, на какой высоте над плоскостью α находится наиболее удаленная от нее точка цилиндра. (На рисунке плоскость α изображена горизонтальной прямой, а цилиндр — прямоугольником.)

19.12. В шар радиусом R вписан цилиндр. а) Чему равна диагональ осевого сечения? б) Какой из таких цилиндров имеет наибольшую площадь осевого сечения?

19.13. Дан цилиндр с радиусом основания R. Его кладут в щель шириной d так, что его ось параллельна краям щели. На сколько он углубится в эту щель?

19.14. Цилиндр толкнули, и он покатился по плоскости. а) Какую фигуру «заметёт» ось цилиндра при этом движении? б) Как найти площадь этой фигуры, если известны размеры цилиндра и число оборотов, сделанных им?

§ 20. ПРИЗМЫ

20.1. Определение и общие свойства призмы

Зная, что такое цилиндр, мы можем теперь определить призму как частный случай цилиндра. А именно:

Призмой называется цилиндр, основание которого — многоугольник.

Если основание призмы — n-угольник, то призма называется n-угольной (рис. 200). Из этого определения следуют такие свойства призмы.

Так как основания любого цилиндра равны и параллельно расположены, то оба основания призмы — равные и параллельно расположенные многоугольники.

Боковая поверхность призмы состоит из тех образующих призмы, которые соединяют граничные точки ее оснований (рис. 201). Основания призмы вместе с ее боковой поверхностью составляют **поверхность призмы, или полную поверхность призмы.**

Возьмем любые две соответствующие стороны оснований призмы, например AB и $A'B'$ (рис. 202). Они равны и параллельны. Поэтому они являются противоположными сторонами параллелограмма $AA'B'B$. Сам этот параллелограмм заполнен образующими цилиндра, которые соединяют точки сторон AB

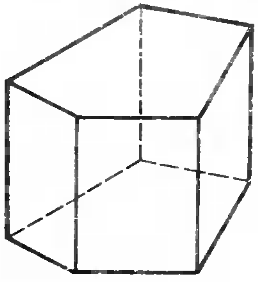


Рис. 200

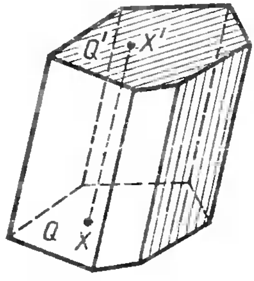


Рис. 201

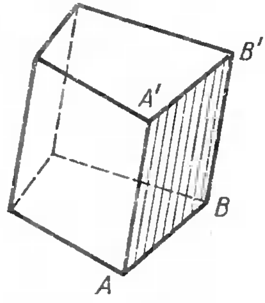


Рис. 202

и $A'B'$. Следовательно, боковая поверхность призмы состоит из параллелограммов, одна пара противоположных сторон которых является парой соответствующих сторон оснований призмы.

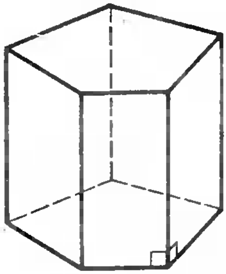


Рис. 203

Таким образом, поверхность призмы, определенной как цилиндр с многоугольником в основании, имеет такое строение, как сказано в определении призмы в п. 4.4: призма ограничена двумя равными многоугольниками — основаниями призмы — и параллелограммами, у каждого из которых одна сторона общая с одним основанием, а противоположная ей сторона общая с другим основанием.

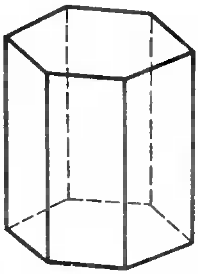


Рис. 204

Можно доказать также (попробуйте это сделать самостоятельно), что призма, определенная в п. 4.4, является цилиндром, в основании которого многоугольник.

Итак, два подхода к определению призмы равносильны.

Параллелограммы, составляющие боковую поверхность призмы, называются **боковыми гранями призмы**, а их стороны, не лежащие на основаниях,— **боковыми ребрами призмы.**

Как образующие цилиндра, все боковые ребра призмы равны и параллельны.

Поскольку призма — цилиндр, то все понятия, относящиеся к цилиндрам, относятся к призмам. Например, **высота призмы** — это общий перпендикуляр плоскостей, где лежат основания призмы (или его длина).

Призма называется **прямой**, если ее боковые ребра перпендикулярны плоскостям оснований. Боковые грани прямой призмы являются прямоугольниками (рис. 203). Это следует из определения перпендикулярности прямой и плоскости. Боковые грани прямой призмы также перпендикулярны основаниям призмы (по признаку перпендикулярности плоскостей).

Правильной призмой называется прямая призма, основание которой — правильный многоугольник (рис. 204).

20.2. Параллелепипед

Подобно тому как тетраэдр является пространственным аналогом треугольника, так параллелепипед является аналогом параллелограмма.

Параллелепипед можно определить как призму, в основании которой — параллелограмм (рис. 205). Таким образом, **параллелепипед** — это призма, у которой все грани — парал-

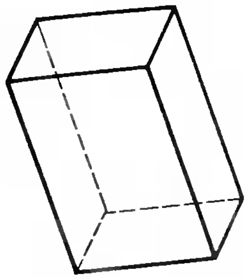


Рис. 205

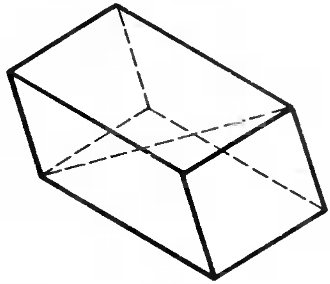


Рис. 206

лелограммы. Их всего шесть. У параллелепипеда три пары равных и параллельно расположенных граней. Поэтому любую грань параллелепипеда можно принять за его основание.

Для каждой вершины параллелепипеда есть одна противоположная ей вершина, та, которая не лежит с данной вершиной в одной грани.

Отрезок, соединяющий противоположные вершины параллелепипеда, называется **диагональю параллелепипеда** (рис. 206). У параллелепипеда четыре диагонали.

Пространственным аналогом прямоугольника является **прямоугольный параллелепипед.** Параллелепипед называется прямоугольным, если все его грани — прямоугольники (рис. 207). **Куб** — это прямоугольный параллелепипед, все ребра которого равны. Куб является пространственным аналогом квадрата. Все грани куба — квадраты.

Несложно доказать основные свойства прямоугольного параллелепипеда (сделайте это самостоятельно):

1. *ребра, сходящиеся в каждой вершине прямоугольного параллелепипеда, взаимно перпендикулярны;*

2. *каждое ребро прямоугольного параллелепипеда перпендикулярно его противоположным граням, на которых лежат концы ребра;*

3. *любые две грани прямоугольного параллелепипеда либо параллельны, либо перпендикулярны.*

Пространственным аналогом теоремы Пифагора является следующее утверждение: ***квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его ребер, исходящих из одной вершины*** (рис. 208).

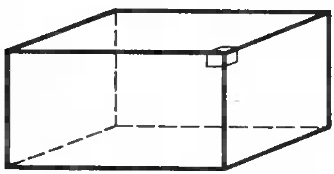


Рис. 207

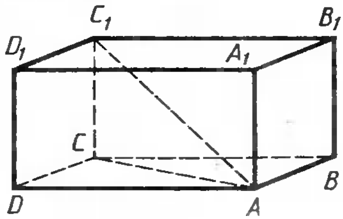


Рис. 208

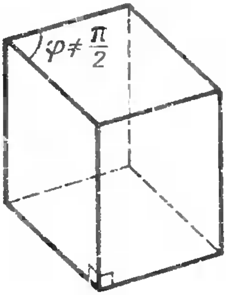


Рис. 209

Действительно, из прямоугольных треугольников ABC и ACC_1 получаем:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \text{ и } AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2.$$

Поэтому

$$AC_1^2 = AB^2 + BC^2 + CC_1^2.$$

И так как $BC = AD$ и $CC_1 = AA_1$, то

$$AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2.$$

Прямоугольный параллелепипед, конечно, является прямой призмой. Но среди параллелепипедов есть и такие, которые будут прямыми, но не прямоугольными (рис. 209). У таких прямых параллелепипедов две пары граней — прямоугольники (их естественно считать боковыми гранями), а одна пара граней — параллелограммы, отличные от прямоугольников,— основания прямого параллелепипеда.

20.3. Симметрия параллелепипеда

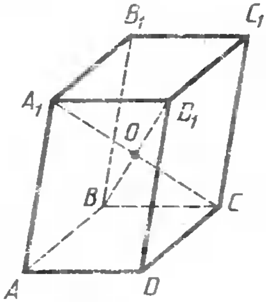


Рис. 210

Все диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам (задача 7.1). Поэтому противоположные вершины параллелепипеда симметричны относительно этой точки. Следовательно, каждый *параллелепипед имеет центр симметрии* — точку пересечения его диагоналей (рис. 210).

В общем случае осей и плоскостей симметрии параллелепипед не имеет. Прямой, но не прямоугольный параллелепипед всегда имеет ось симметрии — прямую, проходящую через центры симметрии его оснований, и плоскость симметрии, проходящую через середины его боковых ребер. Если основания прямого параллелепипеда — ромбы (но не квадраты), то появляются еще две оси и две плоскости симметрии (рис. 211).

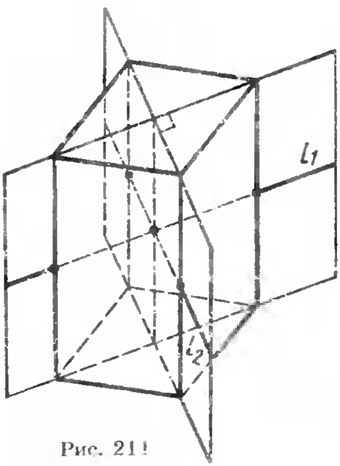


Рис. 211

Рассмотрим теперь случай прямоугольного параллелепипеда, среди граней которого нет квадратов. Его осями симметрии являются прямые, проходящие через центры проти-

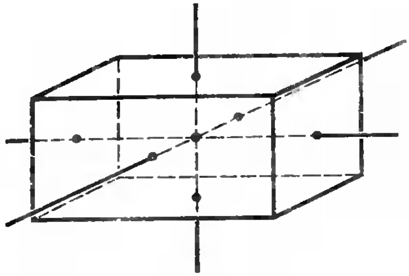


Рис. 212

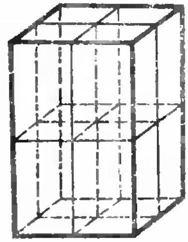


Рис. 213

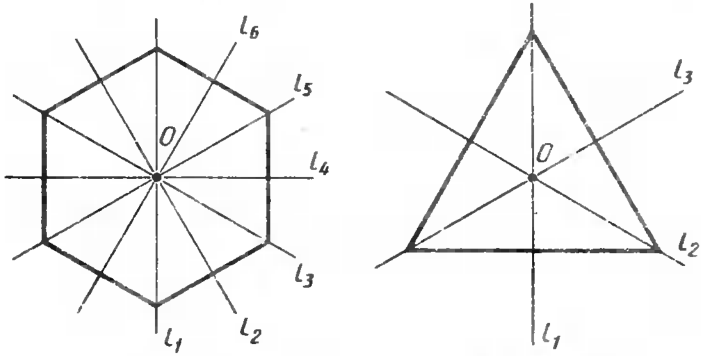
воположных граней (рис. 212). Плоскостями симметрии прямоугольного параллелепипеда являются плоскости, проходящие через середины параллельных ребер (рис. 213).

Если среди граней прямоугольного параллелепипеда есть квадраты, то он является правильной четырехугольной призмой. Симметрия правильных призм рассмотрена в следующем пункте, а симметрия куба — в § 24.

▲ 20.4. Симметрия правильных призм. Поворот вокруг прямой

Напомним, что правильной называется прямая призма, в основании которой правильный многоугольник. Симметричность правильных призм определяется симметричностью их оснований (рис. 214), а также перпендикулярностью основаниям боковых ребер и граней.

У правильной n-угольной призмы имеется n плоскостей симметрии, проходящих через соответствующие оси симметрии оснований призмы (рис. 215). Кроме того, у нее имеется еще



а) n-четное б) n-нечетное

Рис. 214

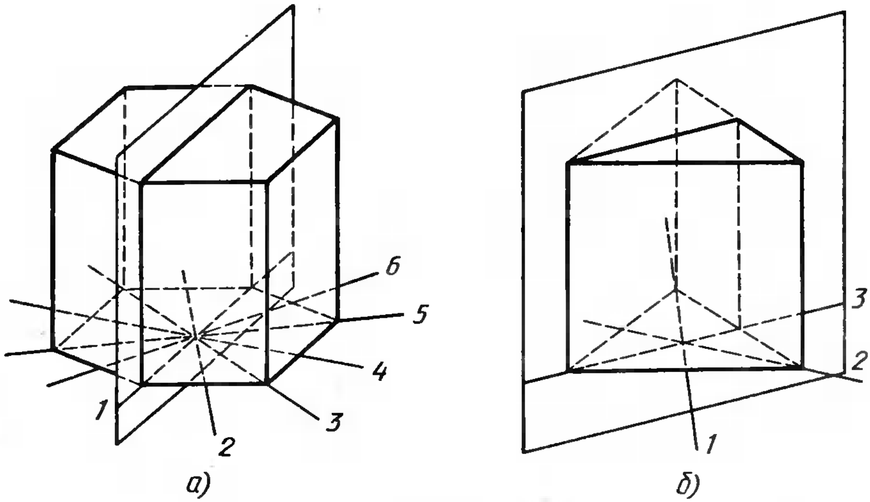


Рис. 215

одна плоскость симметрии, которая проходит через середины боковых ребер (рис. 216).

Осями симметрии правильной n-угольной призмы всегда являются n осей симметрии сечения этой призмы, проходящего через середины боковых ребер (рис. 217). Если к тому же n четно, то осью симметрии является еще прямая, которая соединяет центры оснований (рис. 218). Если же n нечетно, то это не так и других осей симметрии нет.

Отрезок, соединяющий центры оснований правильной призмы, называется ее **осью** (рис. 219).

Если n четно, то середина оси правильной n-угольной призмы является центром симметрии этой призмы (рис. 220). Если

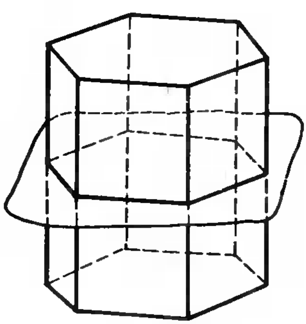


Рис. 216

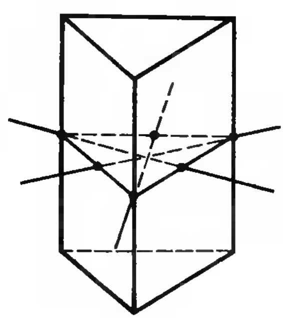


Рис. 217

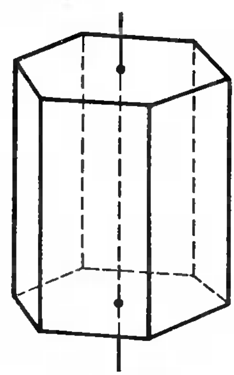


Рис. 218

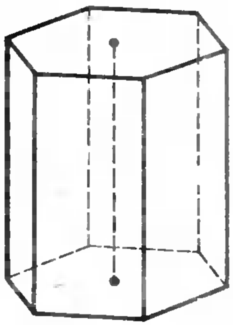


Рис. 219

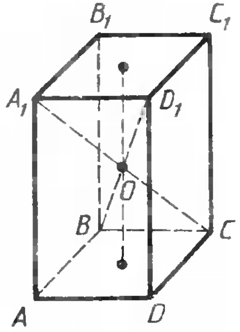


Рис. 220

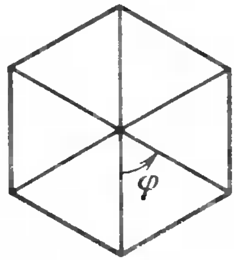


Рис. 221

же n нечетно, то центра симметрии у правильной призмы нет (как и у ее основания).

Итак, симметричность правильной n-угольной призмы определяется симметричностью ее основания — правильного n-угольника. Но, как известно из планиметрии, правильные n-угольники имеют еще один вид симметрии — вращательную, т. е. они самосовмещаются при повороте вокруг своего центра на угол $\varphi = \frac{360^\circ}{n}$ (рис. 221), а также на любой угол, кратный φ. Аналогично правильные n-угольные призмы самосовмещаются при повороте вокруг своей оси на такой же угол φ (рис. 222).

Подробнее это означает следующее. Плоскости, перпендикулярные оси правильной n-угольной призмы P_n, параллельны ее основанию. Поэтому все сечения призмы P_n такими плоскостями равны ее основанию и проектируются на него. Центры этих правильных n-угольников лежат на оси призмы. Поэ-

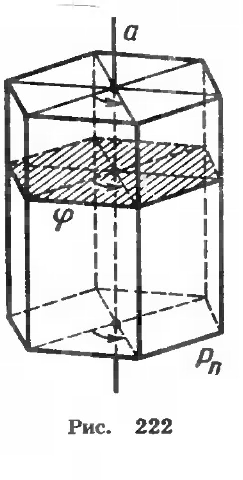


Рис. 222

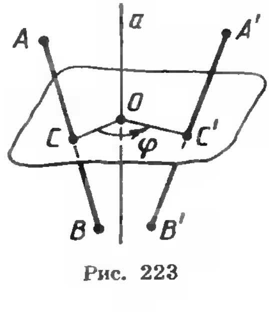


Рис. 223

тому если эти многоугольники одновременно повернуть в их плоскостях в одном направлении на угол φ вокруг их центров, то все они самосовместятся. А потому при таком преобразовании и призма P_n самосовместится. Такое преобразование призмы называется поворотом вокруг прямой — оси призмы — на угол φ. Тем самым призма среди симметрий имеет и поворотную симметрию.

Вообще **поворотом фигуры вокруг прямой a на угол φ** называется такое преобразование, при котором в каждой плоскости, перпендикулярной прямой a и пересекающей фигуру, происходит поворот вокруг точки пересечения этой плоскости с прямой a на угол φ в одном и том же направлении для всех плоскостей (рис. 223). Прямая a называется осью поворота, угол φ — углом поворота. (Среди поворотов есть также поворот на 0° — тождественный поворот.)

Поворот задается осью, углом и направлением поворота в какой-либо плоскости, перпендикулярной оси.

Из определения фигуры вращения и поворота вокруг прямой следует, что любой поворот вокруг оси фигуры вращения самосовмещает эту фигуру саму с собой. В частности, сфера и ограниченный ею шар самосовмещаются при любом повороте вокруг любого их диаметра.

Примеров реальных поворотов вокруг прямой очень много: поворот двери, колеса вокруг оси, пропеллера, ворота колодца и т. п. Приведите еще примеры поворотов вокруг прямой в пространстве.

Осевая симметрия в пространстве является поворотом на 180° вокруг оси симметрии. Действительно, в результате поворота на 180° вокруг прямой a точка X, не лежащая на прямой a, перейдет в такую точку X', что прямая a перпендикулярна отрезку XX' и пересекает его в середине. ▼

Задачи к § 20

Основные задачи

20.1. Докажите, что все перпендикулярные сечения треугольной призмы имеют одинаковые периметры и площади. Верно ли это утверждение для четырехугольной призмы? (Перпендикулярное сечение призмы — это многоугольник, полученный в пересечении всех граней (или их продолжений) боковой поверхности призмы с плоскостью, перпендикулярной ее боковому ребру.)

20.2. Докажите, что около правильной призмы можно описать сферу.

20.3. При каком условии в правильную призму можно вписать сферу?

20.4. Докажите, что около прямоугольного параллелепипеда можно описать сферу. При каком условии в него можно вписать сферу?

20.5. Пусть диагональ прямоугольного параллелепипеда составляет с его ребрами углы φ_1, φ_2, φ_3. Докажите, что

$$\cos^2\varphi_1+\cos^2\varphi_2+\cos^2\varphi_3=1.$$

* * *

20.6. Сколько вершин, ребер и граней имеет n-угольная призма?

20.7. Какой вид имеет призма, у которой: а) есть боковое ребро, перпендикулярное основанию; б) две боковые соседние грани перпендикулярны основанию; в) две соседние грани — прямоугольники?

20.8 а) Как расположены по отношению к основанию грани прямой призмы? б) Могут ли в наклонной призме (например, в треугольной) быть грани, перпендикулярные основанию?

20.9. а) Сколько граней являются прямоугольниками в прямой треугольной призме? в четырехугольной? в n-угольной? б) Сколько граней могут быть прямоугольниками в наклонной треугольной призме? в четырехугольной наклонной призме? в n-угольной наклонной призме?

20.10. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ основанием является равносторонний треугольник. Какой по виду является эта призма, если вершина A_1 верхнего основания проектируется: а) в середину ребра AC; б) в середину ребра BC; в) в центр нижнего основания; г) в точку C; д) в точку B? В каждом случае нарисуйте проекции остальных вершин верхнего основания на плоскость нижнего основания.

20.11. а) В параллелепипеде две соседние грани перпендикулярны третьей. Какого он вида? б) Могут ли в наклонном параллелепипеде быть грани, перпендикулярные основанию? в) Какой фигурой может быть основание наклонного параллелепипеда?

20.12. а) Чем отличаются прямоугольный параллелепипед и прямой параллелепипед? б) Если параллелепипед прямой, то обязательно ли он прямоугольный? а наоборот? в) Какой вид имеет параллелепипед, если в нем ровно четыре грани — прямоугольники? ровно две грани — прямоугольники? г) Докажите, что правильная четырехугольная призма является прямоугольным параллелепипедом. Верно ли обратное?

20.13. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, у которого все грани — ромбы, $|AB|=1$, острые углы ромбов, равные $60°$, сходятся в вершине A.

1) Какого вида фигура получится в его сечении плоскостью: а) A_1BD; б) AA_1C_1; в) BD_1B_1; г) проходящей через точку D перпендикулярно прямой AA_1; д) проходящей через точку D_1

перпендикулярно прямой A_1B_1; е) проходящей через точку B_1 перпендикулярно прямой AD?

2) Какая фигура получится при проектировании его на плоскость: а) ABC; б) BB_1D_1; в) AA_1C_1?

3) Вычислите расстояния: а) A_1D; б) A_1C; в) B_1D; г) от A_1 до плоскостей граней; д) от (AA_1) до (CC_1); е) от (AA_1) до плоскости BB_1D_1; ж) от (BB_1) до плоскости AA_1C_1; з) между плоскостями AB_1D_1 и BDC_1.

4) Вычислите углы между: а) боковым ребром и плоскостью основания; б) прямой CD и плоскостью AA_1D_1; в) соседними боковыми гранями; г) плоскостями AA_1C_1 и BB_1D_1.

5) Можно ли: а) вокруг него описать шар; б) в него вписать шар?

20.14. Дан прямоугольный параллелепипед. а) Установите зависимость между длинами его диагоналей и диагоналей тех его граней, которые имеют с ней одну и ту же общую точку. б) Установите зависимость между углами, которые диагональ параллелепипеда составляет с плоскостями трех граней, с которыми она имеет одну и ту же общую точку. в) Пусть диагональ параллелепипеда равна 1, а ее углы с боковыми гранями равны φ_1, φ_2, φ_3. Можете ли вы найти его ребра?

20.15. Перпендикулярное сечение призмы — равносторонний треугольник. Докажите, что основанием призмы могут быть разные по форме треугольники.

20.16. Можете ли вы узнать длину диагонали спичечного коробка, ничего в нем не измеряя?

§ 21. КОНУСЫ

21.1. Определение и общие свойства конусов

Форму конуса имеют терриконы и вулканы, воронки и колбы, кучи песка (рис. 224, 225). В геометрии же конус, как и цилиндр, определяют как фигуру, образованную отрезками.

Пусть даны плоская фигура F, некоторая точка P, не лежащая с фигурой F в одной плоскости. Отрезки, проведенные из точки P во все точки фигуры F, образуют фигуру, которую называют **конусом**; точка P называется **вершиной конуса**, фигура F — **основанием конуса** (рис. 226).

Итак, **конусом с вершиной P и основанием F** называется фигура, образуемая отрезками, соединяющими точку P со всеми точками фигуры F (при условии, что F — плоская фигура, не лежащая с точкой P в одной плоскости).

Рис. 224

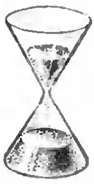


Рис. 225

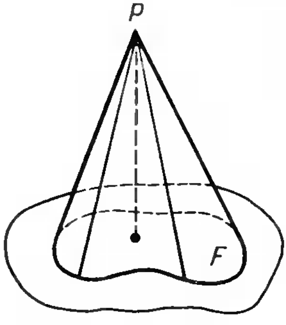


Рис. 226

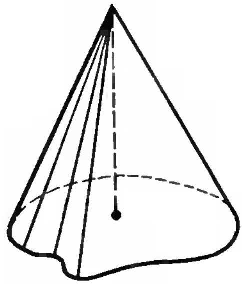


Рис. 227

Отрезки, соединяющие вершину конуса с точками его основания, называются **образующими конуса.**

Высотой конуса называется перпендикуляр из вершины конуса на плоскость его основания (рис. 227), а также длина этого перпендикуляра.

Т е о р е м а *(о сечении конуса).* ***Сечение конуса плоскостью, параллельной плоскости его основания, подобно основанию. Коэффициент подобия равен отношению высоты отсеченного конуса к высоте данного конуса.***

В стереометрии, как и в планиметрии, фигура F' называется подобной фигуре F с коэффициентом $k>0$, если можно так сопоставить их точки, что $X'Y'=kXY$ для любых точек X, Y фигуры F и соответствующих им точек X', Y' фигуры F' (рис. 228).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть P — вершина конуса K, F — его основание, F' — сечение конуса плоскостью α', параллельной плоскости основания α (рис. 229). Каждой точке $X \in F$ сопоставим точку X', в которой отрезок PX пересекает плоскость α'. Получаем отображение основания F на сечение F'. Докажем, что это отображение (преобразование) является подобием, т. е. что при этом отображении все расстояния изменяются в одном и том же отношении.

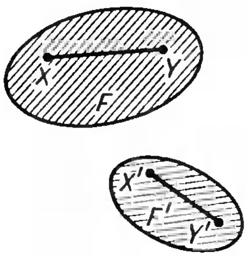


Рис. 228

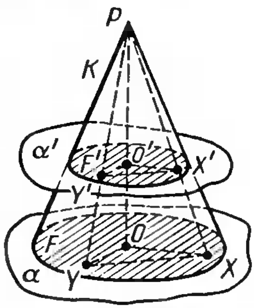


Рис. 229

Проведем высоту PO конуса K, и пусть O' — точка, в которой высота PO пересекает плоскость α'. Отрезок PO' является высотой конуса K', отсеченного плоскостью α'.

Возьмем две точки X и Y основания F. Пусть X', Y' — точки пересечения образующих PX, PY с плоскостью α'.

Рассмотрим треугольники PXY и $PX'Y'$. Они подобны, так как отрезки XY и $X'Y'$ параллельны (поскольку плоскость PXY пересекает параллельные плоскости α и α' по параллельным прямым).

Поэтому

$$\frac{PX'}{PX}=\frac{X'Y'}{XY}.$$

Теперь рассмотрим треугольники POX и $PO'X'$. Они также подобны, и потому

$$\frac{PX'}{PX}=\frac{PO'}{PO}.$$

Из этих равенств следует, что

$$\frac{X'Y'}{XY}=\frac{PO'}{PO}.$$

Так как это установлено для любых точек X, Y основания F, то фигура F' подобна фигуре F с коэффициентом подобия $\frac{PO}{PO'}$, что и требовалось доказать.

21.2. Прямой круговой конус

Конус задается своей вершиной и основанием. Поэтому конусы различают по виду основания и положению вершины относительно основания.

Если основание конуса — круг, то конус называют круговым.

Прямым круговым конусом называется конус, у которого основание — круг, а вершина проектируется в центр основания, т. е. высота попадает в центр основания (рис. 230). Высота прямого кругового конуса называется также его **осью**.

Как следует из теоремы о сечении конуса, *все сечения прямого кругового конуса плоскостями, параллельными основанию (и тем самым перпендикулярными его оси), являются кругами с центрами на оси*. Следовательно, *прямой круговой конус — фигура вращения:* его ось и есть его ось вращения (рис. 231). Поэтому прямой круговой конус называют также **конусом вращения**.

Осевые сечения прямого кругового конуса — это его сечения плоскостями, проходящими через ось. Все такие сечения представляют собой равнобедренные треугольники. «Половина»

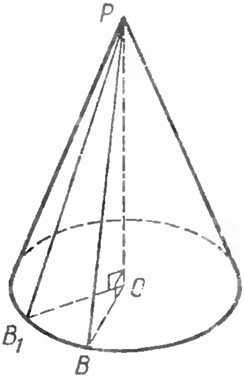


Рис. 230

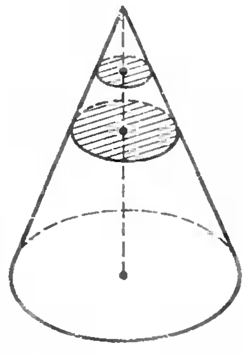


Рис. 231

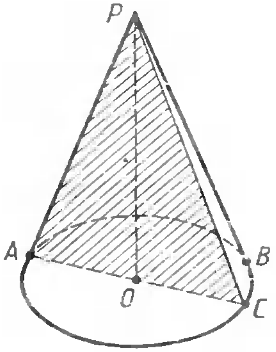


Рис. 232

этого сечения — прямоугольный треугольник с катетом на оси (см. рис. 230). Прямой круговой конус получается вращением такого треугольника вокруг этого катета или вращением равнобедренного треугольника (рис. 232) вокруг оси симметрии.

Фигура, состоящая из тех образующих кругового конуса, которые соединяют его вершину с окружностью основания, называется **боковой поверхностью** этого конуса. Она сама представляет собой конус с той же вершиной, основанием которого служит окружность основания кругового конуса.

Ось конуса вращения является его осью симметрии, а также осью поворотной симметрии. Любая плоскость, проходящая через ось конуса, является его плоскостью симметрии.

З а м е ч а н и е. В средней школе конусом обычно называют только конус вращения. Однако конусами являются также и фигуры, образованные лучами, исходящими из одной точки — вершины конуса, или образованные прямыми, проходящими через одну точку. Таких конусов мы не рассматриваем.

21.3. Усеченный конус

Усеченный конус получается, если от конуса отсечь меньший конус плоскостью, параллельной основанию (рис. 233).

У усеченного конуса два основания: «нижнее» — основание исходного конуса и «верхнее» — основание отсекаемого конуса: оно является сечением исходного конуса плоскостью, параллельной плоскости основания. Поэтому из теоремы о сечении конуса следует, что *основания усеченного конуса подобны друг другу.*

Высотой усеченного конуса называется перпендикуляр, опущенный из точки плоскости одного основания на плоскость другого. Все такие перпендикуляры равны (см. п. 14.2). Высо-

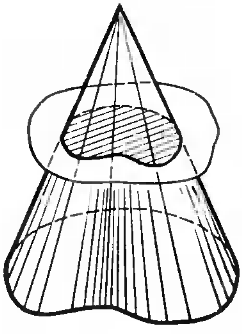


Рис. 233

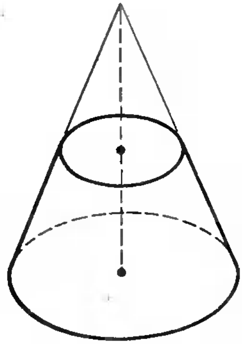


Рис. 234

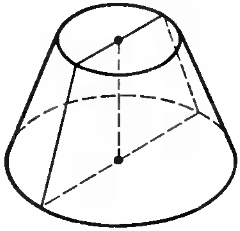


Рис. 235

той называют также их длину, т. е. расстояние между плоскостями оснований.

Усеченный конус вращения получается из конуса вращения (рис. 234). Поэтому его основания и все параллельные им сечения — круги с центрами на одной прямой — на оси. Усеченный конус вращения получается вращением трапеции вокруг ее боковой стороны, перпендикулярной основаниям, или равнобедренной трапеции вокруг оси симметрии (рис. 235).

Боковая поверхность усеченного конуса вращения — это принадлежащая ему часть боковой поверхности конуса вращения, из которого он получен.

▲ 21.4. Конические сечения

Сечение боковой поверхности конуса вращения плоскостью, не пересекающей его основания, является эллипсом (рис. 236). Поэтому эллипс относят к коническим сечениям.

К коническим сечениям относятся и другие хорошо известные кривые — гиперболы и параболы. Рассмотрим неограниченный конус, получающийся при продолжении боковой поверхности конуса вращения, т. е. такой конус K, образующие которого — лучи и который является поверхностью (рис. 237). Пересечем его плоскостью α, не проходящей через вершину. Если плоскость α пересекает все образующие конуса, то в сечении, как уже говорилось, получаем эллипс.

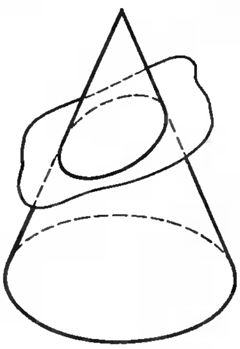


Рис. 236

Поворачивая плоскость α, можно добиться того, чтобы она пересекала все образующие конуса K, кроме одной (которой α параллельна). Тогда в сечении получим параболу (рис. 238).

Наконец, вращая плоскость α дальше, переведем ее в такое положение, что α, пересекая часть образующих конуса K, не пересекает уже бесконечное множество других его образующих и параллельна двум из них (рис. 239). Тогда в сечении конуса K с плоскостью α получаем кривую, называемую гиперболой (точнее, одну ее «ветвь»). Так, гипербола, которая является графиком функции $y=\frac{a}{x}$,— частный случай гиперболы — равнобочная гипербола, подобно тому как окружность является частным случаем эллипса.

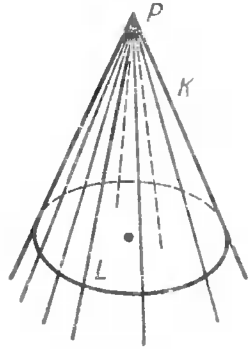


Рис. 237

Любые гиперболы можно получить из равнобочных с помощью проектирования, аналогично тому как эллипс получается параллельным проектированием окружности.

Чтобы получить обе ветви гиперболы, надо взять сечение конуса, имеющего две «полости», т. е. конуса, образованного не лучами, а прямыми, содержащими образующие боковой поверхности конуса вращения (рис. 240).

Конические сечения изучали еще древнегреческие геометры, и их теория была одной из вершин античной геометрии. Наиболее полное исследование конических сечений в древности было проведено Аполлонием Пергским (III в. до н. э.).

Имеется ряд важных свойств, объединяющих в один класс эллипсы, гиперболы и параболы. Например, ими исчерпываются «невырожденные», т. е. не сводящиеся к точке, прямой или паре прямых, кривые, которые задаются на плоскости в декартовых координатах уравнениями вида $ax^2+bxy+cy^2+$ $+dx+ey+f=0$.

Конические сечения играют важную роль в природе: по эллиптическим, параболическим и гиперболическим орбитам

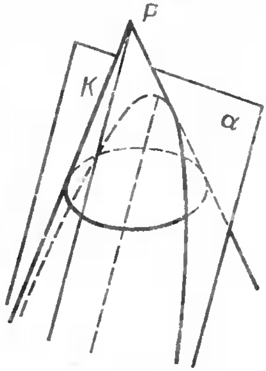


Рис. 238

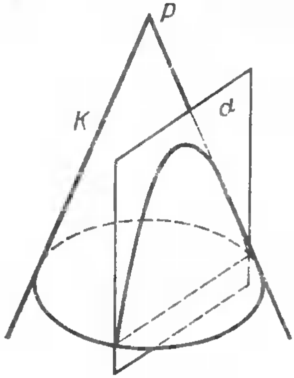


Рис. 239

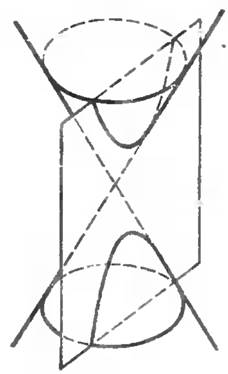


Рис. 240

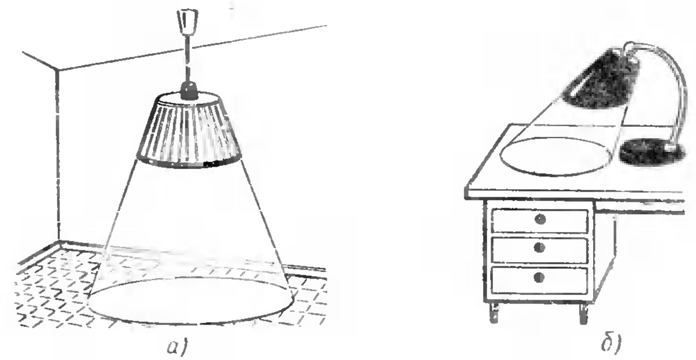


Рис. 241

движутся тела в поле тяготения (вспомните законы Кеплера). Замечательные свойства конических сечений часто используются в науке и технике, например при изготовлении некоторых оптических приборов или прожекторов (поверхность зеркала в прожекторе получается вращением дуги параболы вокруг оси параболы). Мы можем наблюдать конические сечения как границы тени от круглых абажуров (рис. 241). ▼

Задачи к § 21

В задачах, если нет специальных оговорок, под конусом понимается конус вращения, а под усеченным конусом — усеченный конус вращения; приняты обозначения: R — радиус основания конуса, H — его высота, L — образующая поверхности конуса или усеченного конуса.

Основные задачи

21.1. В конусе с радиусом основания R и высотой H проводятся сечения, параллельные основанию. Выразите как функцию от x площади этих сечений, где x — расстояние от центра основания до этих сечений.

21.2. Докажите, что около конуса можно описать сферу. Это означает, что найдется сфера, на которой лежит вершина конуса и окружность его основания. Конус в данном случае называется вписанным в сферу, а сфера — описанной около конуса. Сформулируйте аналогичное утверждение для усеченного конуса. Верно ли оно?

21.3. Докажите, что в конус можно вписать сферу. Это означает, что найдется сфера, которая касается основания, а с боковой поверхностью конуса имеет общую окружность. Конус в этом случае называется описанным около сферы, а сфера — вписанной в конус. Сформулируйте аналогичное утверждение для усеченного конуса и сферы. Верно ли оно?

* * *

21.4. Какой фигурой является сечение конуса плоскостью: а) параллельной основанию; б) проходящей через вершину конуса?

21.5. Какой фигурой является проекция конуса на плоскость, параллельную: а) основанию; б) осевому сечению? Ответьте на эти же вопросы для усеченного конуса.

21.6. Какая из образующих конуса: а) самая длинная; б) самая короткая; в) составляет с плоскостью основания наибольший угол; г) составляет с плоскостью основания наименьший угол?

21.7. Докажите, что все образующие поверхности конуса: а) составляют с плоскостью основания равные углы; б) одинаково удалены от центра основания.

21.8. Дан отрезок AB. Какую фигуру составляют все равные отрезки AX, такие, что угол XAB: а) один и тот же; б) меньше заданного угла? (Указание. Этот угол может быть как острым, так и прямым или тупым.)

21.9. На сколько частей могут разделить конус две плоскости? три плоскости?

21.10. Чему равна высота конуса, у которого: а) $2R=4$, образующая поверхность конуса $L=3$; б) $2R=1$, угол между образующими осевого сечения равен $120°$; в) $2R=1$, угол между образующими осевого сечения равен $90°$; г) осевое сечение — равносторонний треугольник с площадью S?

21.11. Чему равна высота усеченного конуса, у которого: а) $R_1=2R_2=L=1$; б) $2R_1=3$, $L=1$, угол между образующими осевого сечения $60°$?

21.12. а) Осевое сечение конуса — равносторонний треугольник (такой конус называется равносторонним). Докажите, что другого такого сечения у него нет. Решите аналогичную задачу для прямоугольного треугольника. б) Осевое сечение конуса — тупоугольный треугольник. Докажите, что у него найдутся сечения, являющиеся прямоугольными треугольниками.

21.13. В конусе через его вершину проводятся всевозможные равные сечения. Докажите, что их плоскости: а) одинаково удалены от центра его основания; б) образуют равные углы с осью конуса; в) образуют равные углы с плоскостью основания конуса. Проверьте обратные утверждения.

21.14. В конусе проводится сечение, параллельное основанию. а) Какую часть составляет его площадь от площади основания, если оно проходит через середину оси? б) Через какую точку оси оно проходит, если его площадь составляет половину площади основания?

21.15. Образующая поверхности конуса лежит на опорной плоскости конуса. На каком расстоянии от этой плоскости находится наиболее удаленная от нее точка конуса, если:

а) $R=1{,}5$, $L=2$; б) $R=1{,}5$, $L=3$; в) $R=1{,}5$, $L=4$? Для этих же случаев ответьте на вопрос: какой угол составляет с опорной плоскостью та образующая его поверхности, которая с данной образующей лежит в одном осевом сечении?

21.16. Как найти радиус шара, вписанного в конус? Выберите сами данные, определяющие конус, и получите результат.

21.17. Пусть конус вписан в шар. Докажите, что: а) $L^2=D_ш H$; б) $R^2=H(D_ш-H)$, где $D_ш$ — диаметр шара. Из каждой формулы выразите диаметр шара.

21.18. Дан шар радиусом 2. В каких границах находится площадь осевого сечения конуса: а) вписанного в этот шар; б) описанного около этого шара? Попробуйте решить задачу в общем случае.

§ 22. ПИРАМИДЫ

22.1. Пирамида — частный случай конуса

Что такое пирамида, нам уже известно. Теперь, зная, что такое конус, можем определить пирамиду как такой конус, в основании которого лежит многоугольник.

Если основание пирамиды — n-угольник, то пирамида называется **n-угольной.**

Боковая поверхность пирамиды состоит из всех тех образующих пирамиды, которые соединяют вершину с точками на границе основания. Такая боковая поверхность состоит из конечного числа треугольников, имеющих общую вершину — вершину пирамиды. Эти треугольники называются **боковыми гранями**, а их стороны, не лежащие в основании,— **боковыми ребрами пирамиды.**

Как и у всякого конуса, **высота пирамиды** — это перпендикуляр из вершины пирамиды на плоскость ее основания, а также длина этого перпендикуляра (рис. 242).

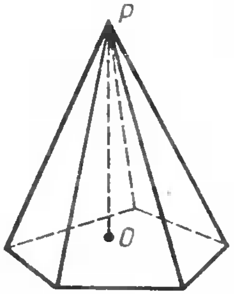


Рис. 242

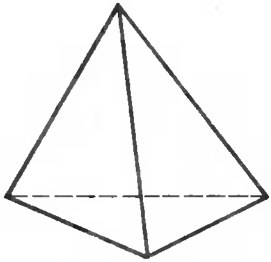


Рис. 243

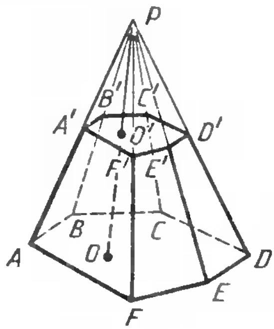


Рис. 244

Самая простая пирамида треугольная, иначе называемая тетраэдром. Тетраэдр имеет всего четыре грани (его название так и переводится — четырехгранник), и любая из них может считаться основанием. Тетраэдр можно изобразить любым четырехугольником с диагоналями (рис. 243, штриховой линией показано невидимое ребро).

Усеченная пирамида получается из пирамиды так же, как получается усеченный конус из конуса: отсечением меньшей пирамиды плоскостью, параллельной основанию исходной пирамиды. Все сказанное об усеченном конусе соответственно относится к усеченным пирамидам (рис. 244).

22.2. Правильная пирамида

Пирамида называется **правильной**, если ее основание — правильный многоугольник и все ее боковые ребра равны. Поэтому *все боковые грани правильной пирамиды — равные равнобедренные треугольники с вершиной в вершине пирамиды.*

Заметим, что правильная треугольная пирамида и правильный тетраэдр не одно и то же. Правильный тетраэдр является правильной треугольной пирамидой, но правильная треугольная пирамида не всегда будет правильным тетраэдром.

Согласно данному определению правильной пирамиды о любой пирамиде по ее внешнему виду можно судить, правильная она или нет: достаточно произвести необходимые измерения на ее гранях. Но это определение, как уже отмечалось в п. 4.3, не дает способа построения правильных пирамид, и неизвестно даже, существуют ли вообще такие пирамиды.

Ответ на этот вопрос получим, доказав теорему, которая дает другой подход к определению правильной пирамиды:

Теорема *(о правильной пирамиде).* ***Пирамида является правильной тогда и только тогда, когда ее основание — правильный многоугольник, а вершина проектируется в центр основания.***

Доказательство. Пусть T — правильная пирамида с вершиной P и основанием Q. Опустим из точки P перпендикуляр PO на плоскость α основания Q. Возьмем любые две вершины A и K основания Q и проведем отрезки OA и OK; получим прямоугольные треугольники POA и POK (рис. 245). Эти треугольники равны, так как они имеют равные гипотенузы PA и PK и общий катет PO. Следовательно, равны их другие катеты, т. е. $OA = OK$. Итак, проекция вершины P пирамиды T на плоскость α равноуда-

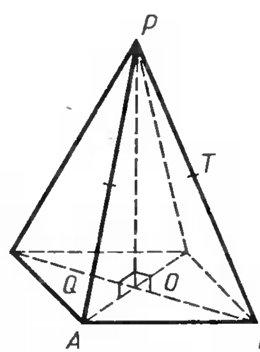


Рис. 245

лена от всех вершин правильного многоугольника Q — основания пирамиды T. Поэтому точка O является центром окружности, описанной вокруг Q, т. е. центром Q.

Итак, доказано, что вершина правильной пирамиды проектируется в центр ее основания.

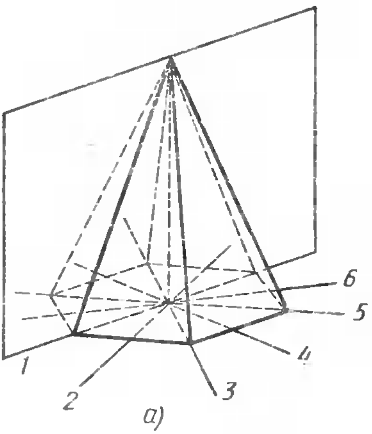
Рассмотрим теперь пирамиду T, основание которой — правильный многоугольник Q и вершина которой P проектируется в его центр — точку O (рис. 245). Снова берем две произвольные вершины A и K основания Q и рассматриваем прямоугольные треугольники POA и POK. Теперь в этих треугольниках общий катет PO и равные катеты OA и OK (поскольку O — центр правильного многоугольника Q). Следовательно, опять треугольники POA и POK равны. Поэтому равны их гипотенузы: $PA = PK$. Значит, все боковые ребра пирамиды T равны, т. е. пирамида T правильная. ■

Теорема показывает, что *правильную пирамиду можно определить как такую пирамиду, у которой основание — правильный многоугольник и вершина проектируется в центр этого многоугольника.*

Теперь ясно, как построить правильную пирамиду: надо из центра O правильного многоугольника Q провести какой-нибудь перпендикуляр OP к плоскости многоугольника Q (рис. 245). Точка P будет вершиной правильной пирамиды, а многоугольник Q — ее основанием.

▲ 22.3. Симметрия правильной пирамиды

У правильной n-угольной пирамиды n плоскостей симметрии. Они проходят через вершину пирамиды и оси симметрии ее основания (рис. 246, a). При отражении в такой плоскости



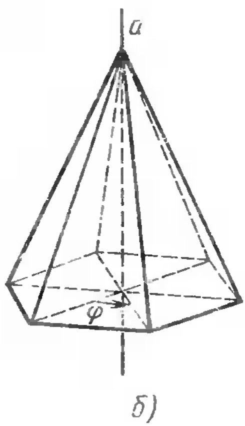


Рис. 246

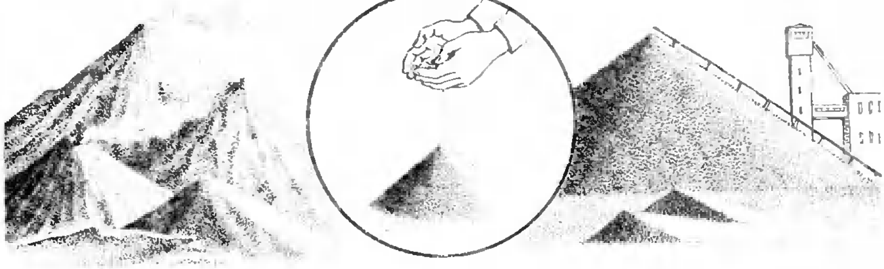


Рис. 247

вершина пирамиды остается на месте, а основание совмещается само с собой. Поэтому и пирамида совмещается сама с собой.

Кроме того, правильная n-угольная пирамида совмещается сама с собой при повороте вокруг прямой, содержащей ее высоту, на угол $\varphi = \frac{360°}{n}$ (а также на любой угол, кратный φ) (рис. 246, б).

Других движений, совмещающих правильную пирамиду саму с собой, кроме случая, когда она является правильным тетраэдром, нет. Поэтому у таких пирамид нет осей симметрии и центров симметрии.

Симметрия правильного тетраэдра будет подробно рассмотрена в § 24.

22.4. Конусы и пирамиды в практике

Классический пример правильных четырехугольных пирамид представляют знаменитые египетские пирамиды. Конусы образуют сыпучие тела, насыпаемые с одного места (песок, пустая порода из шахт и т. д.). Аналогично происхождение примерно конической формы вулканов: ее образуют стекающая расплавленная лава и выбрасываемые камни и пепел (рис. 247).

Примеры предметов, имеющих форму малосужающихся конусов или чаще усеченных конусов вращения или усеченных пирамид, дают шпили зданий, столбы, колонны, фабричные трубы. Например, адмиралтейская игла — шпиль Адмиралтейства в Ленинграде — представляет собой, как и многие другие шпили, узкую усеченную пирамиду, наверху которой (на меньшем основании) помещается еще завершающее украшение (рис. 248).

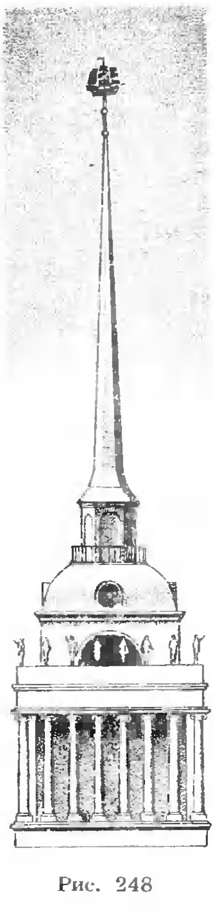


Рис. 248

Форму усеченного конуса имеют многие части предметов обихода (например, посуда). В технике также часто встречаются инструменты, детали и части машин, имеющие конические формы. Пример сочетания конуса с цилиндром дает ракета. Подыщите другие примеры. ▼

Задачи к § 22

Основные задачи

22.1. Докажите, что в правильной треугольной (четырехугольной) пирамиде: а) проекция высоты на боковую грань лежит на оси симметрии грани; б) угол между боковым ребром и плоскостью основания один и тот же для всех боковых ребер; в) угол между боковой гранью и основанием один и тот же для всех боковых граней; г) все углы между соседними боковыми гранями равны.

22.2. а) Докажите, что вокруг правильной n-угольной пирамиды можно описать сферу (для $n=3$ и $n=4$). б) Докажите, что в правильную n-угольную пирамиду можно вписать сферу (для $n=3$ и $n=4$).

22.3. В правильной n-угольной пирамиде (при $n=3$ и $n=4$) известна сторона основания и плоский угол при вершине. Найдите: а) высоту пирамиды; б) радиус описанной сферы; в) радиус вписанной сферы; г) угол между боковым ребром и плоскостью основания; д) угол между апофемой и плоскостью основания; е) угол между боковой гранью и основанием; ж) угол между соседними боковыми гранями.

22.4. В правильной треугольной (четырехугольной) пирамиде известны сторона основания и боковое ребро. Как найти высоту пирамиды? Как найти угол бокового ребра с основанием? Как найти угол между боковой гранью и основанием?

* * *

22.5. Сколько вершин, ребер и граней имеет: а) n-угольная пирамида; б) n-угольная усеченная пирамида?

22.6. Нарисуйте проекцию правильной треугольной пирамиды на плоскость: а) основания; б) проходящую через боковое ребро и высоту.

22.7. Каким по виду многоугольником может быть сечение правильной треугольной пирамиды?

22.8. В правильной треугольной пирамиде известны сторона основания и высота. Как вычислить площадь сечения, проходящего: а) параллельно основанию через середину высоты; б) через боковое ребро и высоту; в) через сторону основания перпендикулярно боковому ребру; г) через центр основания параллельно боковой грани; д) через середины четырех ребер?

22.9. Нарисуйте проекцию правильной четырехугольной пирамиды на плоскость: а) основания; б) проходящую через апофемы противоположных граней; в) боковой грани.

22.10. Каким по виду многоугольником может быть сечение правильной четырехугольной пирамиды?

22.11. В правильной четырехугольной пирамиде известны сторона основания и высота. Как вычислить площадь сечения, проходящего через: а) середину бокового ребра параллельно основанию; б) диагональ основания перпендикулярно боковому ребру; в) диагональ основания параллельно боковому ребру; г) центр основания параллельно боковой грани; д) через сторону основания перпендикулярно противоположной боковой грани? Выберите сами числовые данные и получите результат.

Р е ш е н и е. д) Пусть CDD_1C_1 — искомое сечение (рис. 249). Прежде всего определим вид этого четырехугольника. Так как $CD \parallel AB$, то $CD \parallel (PAB)$. Но тогда $CD \parallel C_1D_1$. (Почему?)

Предположим, что $DD_1 \parallel CC_1$, тогда четырехугольник CDD_1C_1 — параллелограмм. Учитывая, что $AD \parallel BC$, получим (по признаку параллельности плоскостей), что плоскости ADD_1 и BCC_1 параллельны — но они имеют общую точку P. Значит, наше предположение неверно и на самом деле CDD_1C_1 — трапеция. (К тому же результату могли бы прийти иначе: $C_1D_1 < CD$, следовательно, CDD_1C_1 не параллелограмм.)

Нам известны сторона основания пирамиды и высота PQ. Запишем формулу площади трапеции CDD_1C_1:

$$S = \frac{CD + C_1D_1}{2} \cdot h.$$

В ней неизвестны C_1D_1 и h — расстояние между прямыми CD и C_1D_1. Рассмотрим сечение пирамиды PKL, где точка K — середина AB, точка L — середина CD. Обозначим буквой M точку пересечения KP и C_1D_1. Так как $CD \perp (PKL)$, то $CD \perp LM$. Значит, LM — высота трапеции и ее длина есть неизвестная величина h. Кроме того, $LM \perp PK$. (Обоснуйте это.)

Для удобства дальнейших вычислений рассмотрим отдельно треугольник PKL (рис. 250). Он равнобедренный ($PK = PL$).

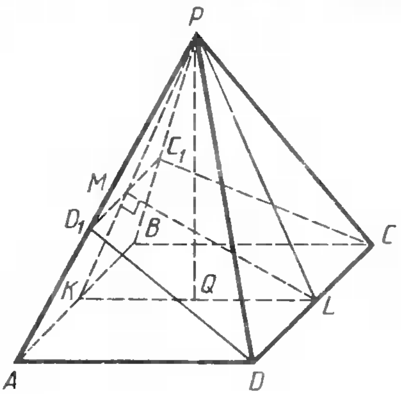


Рис. 249

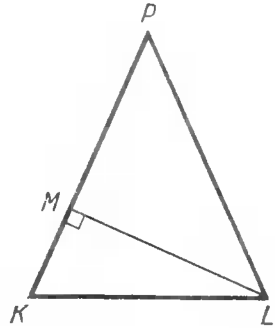


Рис. 250

В нем известно KL (равное AD). PK находим из треугольника PKQ по теореме Пифагора. Так как в треугольнике PKL известны три стороны, то можно найти его площадь, а уже затем и высоту LM на боковую сторону PK.

Перейдем к вычислению C_1D_1. Так как $C_1D_1 \parallel AB$, то $\triangle PC_1D_1 \sim \triangle PAB$, а коэффициентом подобия является отношение $\frac{C_1D_1}{AB}$. Этот коэффициент равен также отношению $\frac{PM}{PK}$, которое можно вычислить из треугольника PKL.

Пусть, к примеру, $CD=2$ (чтобы легче было делить пополам), $PQ=3$. Теперь проведите все вычисления.

Решая эту задачу, предположили, что искомое сечение является четырехугольником, и доказали, что оно является трапецией. Но оно необязательно будет четырехугольником. Рассмотрим треугольник PKL. В нем LM — высота из вершины основания на боковую сторону. Однако хорошо известно, что такая высота необязательно пересекает именно сторону треугольника — она может проходить и через P, если треугольник PKL прямоугольный, и проходить за стороной PK, если треугольник PKL тупоугольный. Соответственно площадь искомого сечения будет получаться другой. (Объясните.)

В связи с этим надо подумать: а какое именно сечение получается при выбранных нами числовых данных — трапеция, треугольник или отрезок? Для этого определим вид треугольника PKL. $KL^2=2^2=4$.

$$PL^2+PK^2=2PK^2=2(PQ^2+QK^2)=2(9+1)=20.$$

Так как $KL^2<PL^2+PK^2$, то треугольник PKL остроугольный, значит, высота LM падает именно на сторону PK, а тогда сечение является трапецией, как мы и предполагали.

§ 23. МНОГОГРАННИКИ

23.1. Общее понятие о многогранниках

Многогранником, как уже говорилось, называют тело, поверхность которого состоит из конечного числа многоугольников. (Многогранником называют также поверхность, составленную некоторым образом из конечного числа многоугольников, но мы будем понимать многогранник как тело.)

Мы рассмотрели простейшие виды многогранников — призмы и пирамиды, но вообще многогранники могут иметь разнообразное и очень сложное строение (рис. 251). Примерами реальных тел, имеющих более или менее точную форму многогранников, могут служить кристаллы, строящиеся дома или, скажем, стол и табуретка.

Многоугольник, лежащий на поверхности многогранника, называется **гранью многогранника,** если к каждой его стороне прилегает многоугольник, лежащий на поверхности много-

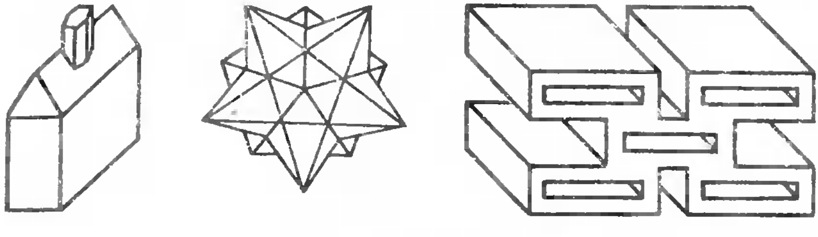


Рис. 251

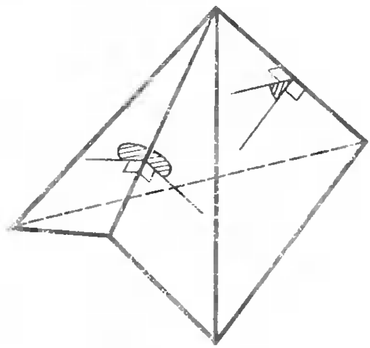


Рис. 252

гранника, но в другой плоскости.

Стороны граней называются **ребрами многогранника,** их вершины — **вершинами многогранника.**

Две грани многогранника, имеющие общее ребро, образуют при нем **двугранный угол многогранника.** Измеряются двугранные углы многогранников так же, как измеряются углы многоугольников, т. е. изнутри многогранника (рис. 252). Поэтому они могут быть как меньше 180°, так и больше 180°.

Ребра многогранника, углы граней при вершинах, двугранные углы при ребрах — это **элементы многогранника.**

Многогранник называется **выпуклым,** если он лежит с одной стороны от плоскости любой его грани, т. е. плоскость любой его грани является его опорной плоскостью (рис. 253).

Простейшими примерами выпуклых многогранников могут служить параллелепипеды, тетраэдры, правильные пирамиды, правильные призмы (но, конечно, и призмы, и пирамиды могут быть и не выпуклыми, как, например, на рисунке 254).

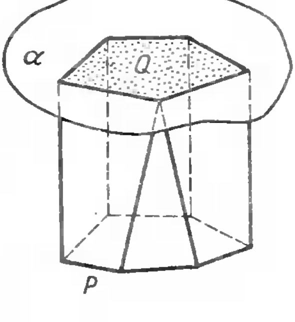


Рис. 253

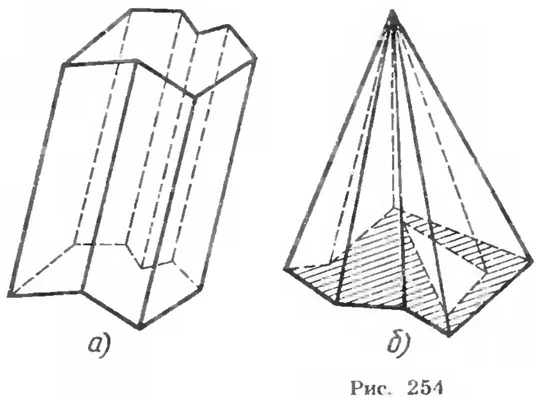


Рис. 254

23.2. Правильные многогранники

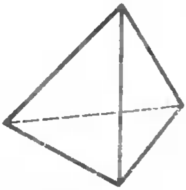


Рис. 255

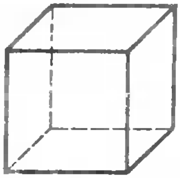


Рис. 256

Правильным называется многогранник, у которого все элементы одного и того же вида равны, т. е. все ребра равны, все углы на гранях равны и все двугранные углы равны.

Грани правильного многогранника — это правильные многоугольники, так как у них все стороны (ребра) равны и углы равны. По этой же причине эти грани равны друг другу[1].

Существует всего пять видов правильных многогранников. Вам хорошо известны два из них — правильный тетраэдр и куб.

1) **Правильный тетраэдр** — тетраэдр, все грани которого — правильные треугольники (рис. 255).

2) **Куб** — параллелепипед, у которого все грани — квадраты (рис. 256).

Укажем остальные три вида правильных многогранников.

3) Восьмигранник, у которого грани — правильные треугольники, сходящиеся по четыре в каждой вершине. Он называется **правильным октаэдром** или просто октаэдром, что по-гречески и значит восьмигранник (рис. 257).

4) Двадцатигранник, у которого все грани — правильные треугольники, сходящиеся по пяти в каждой вершине. Он называется **икосаэдром**, что по-гречески и значит двадцатигранник (рис. 258).

5) Двенадцатигранник, у которого все грани — правильные пятиугольники, сходящиеся по три в каждой вершине; он называется **додекаэдром**, что и значит двенадцатигранник (рис. 259).

Между октаэдром и кубом есть простая связь. Ребра октаэдра можно получить, соединяя центры соседних граней

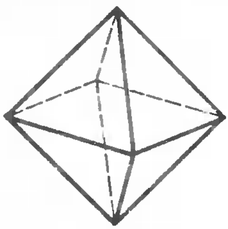


Рис. 257

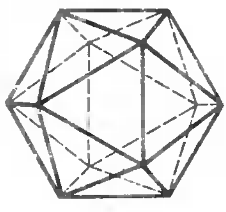


Рис. 258

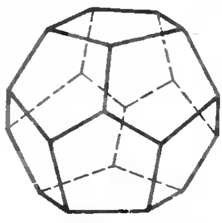


Рис. 259

[1] Часто дают определение правильного многогранника, отличное от высказанного здесь: правильным называется многогранник, если: 1) он выпуклый; 2) все его грани — равные правильные многоугольники; 3) во всех вершинах сходится одно и то же число граней. Это определение равносильно данному здесь. Но правильность состоит именно в равенстве элементов, выпуклость же — ее следствие.

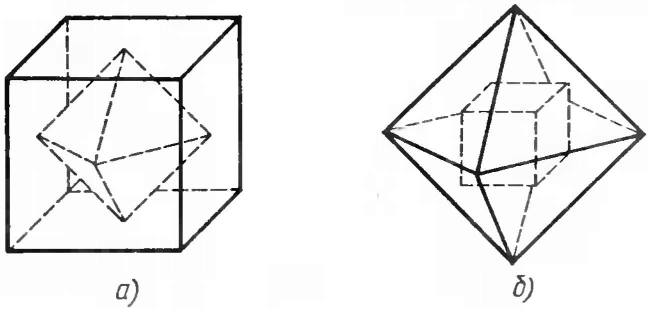


Рис. 260

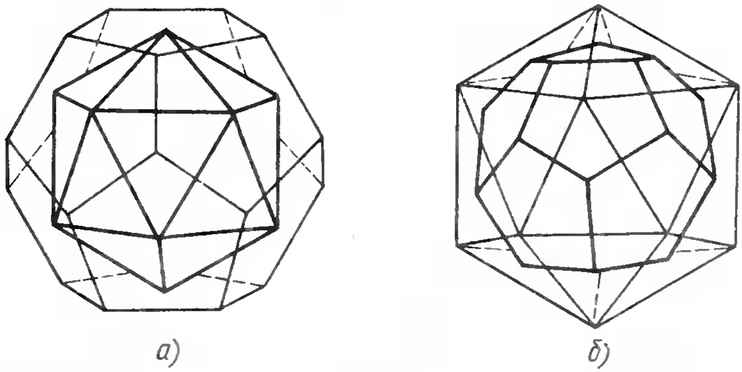


Рис. 261

куба (рис. 260, *а*). Если же соединить центры соседних граней октаэдра, то получим ребра куба (рис. 260, *б*). Говорят, что куб и октаэдр двойственны друг другу: граням одного соответствуют вершины другого и обратно.

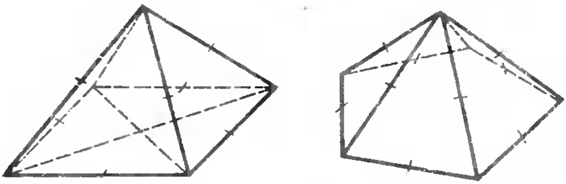
Додекаэдр и икосаэдр двойственны друг другу: соединив отрезками центры соседних граней икосаэдра, получим ребро додекаэдра и наоборот (рис. 261).

▲ 23.3. Построение и некоторые свойства правильных многогранников

Как построить куб и правильный тетраэдр, можно считать известным. Чтобы построить куб, строим квадрат и в его вершинах проводим перпендикуляры, равные его стороне.

Правильный тетраэдр строится так же, как правильная пирамида, но при этом боковые ребра должны быть равны ребрам основания.

Можно построить правильные четырехугольную и пятиугольную пирамиды, боковые грани которых будут правиль-



а) б)

Рис. 262

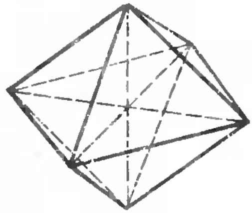


Рис. 263

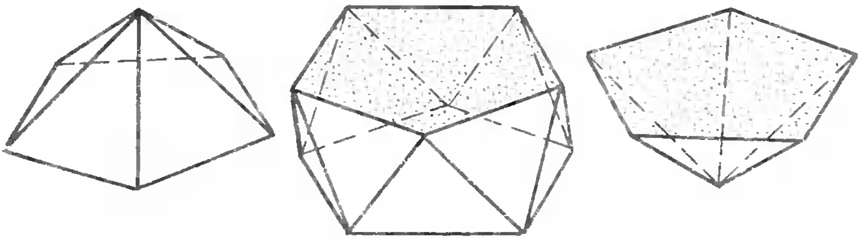


Рис. 264

ными треугольниками (рис. 262), но нет таких правильных пирамид с числом боковых граней больше пяти. (Подумайте почему.)

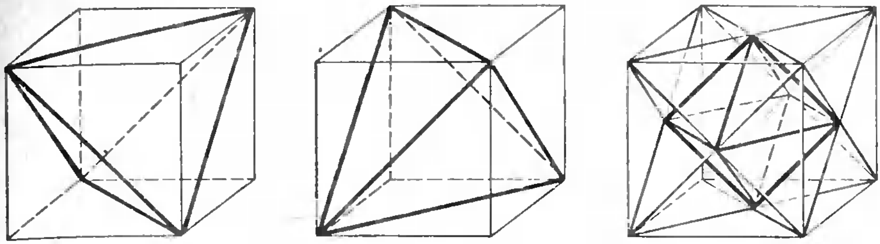
Октаэдр составляется из двух правильных четырехугольных пирамид, сложенных основаниями (рис. 263). Октаэдр можно построить как двойственный кубу правильный многогранник, соединяя центры граней куба.

Построить икосаэдр можно следующим образом. Берется многогранник, называемый пятиугольной антипризмой (рис. 264). У него два основания — правильные пятиугольники, повернутые один относительно другого на угол 36°. Кроме того, у этой антипризмы десять боковых граней — десять правильных треугольников. Чтобы достроить антипризму до икосаэдра, на ее основаниях строят две правильные пятиугольные пирамиды, боковые грани которых — правильные треугольники. Икосаэдр составлен из антипризмы и этих двух пирамид.

Когда икосаэдр построен, додекаэдр строится как двойственный икосаэдру. ▼

23.4*. Интересные свойства правильных многогранников

1) *У правильного тетраэдра есть квадратные сечения и таких сечений три.* Они проходят через середины ребер тетраэдра.



а) б) в)

Рис. 265

2) *У куба и октаэдра есть по четыре сечения, являющихся правильными шестиугольниками.* У куба такое сечение получается плоскостью, перпендикулярной диагонали куба и проходящей через его центр. Вершины шестиугольника лежат в серединах ребер, не подходящих к вершинам, соединенным данной диагональю.

3) *У икосаэдра и додекаэдра есть по шесть сечений, являющихся правильными десятиугольниками.*

Сечения правильных многогранников изображены на форзаце учебника.

4) *В куб можно вписать два правильных тетраэдра.* Вершины этих тетраэдров лежат в вершинах куба, а ребра этих тетраэдров — диагонали граней куба. Пересечением этих тетраэдров будет октаэдр, вершины которого лежат в центрах граней куба (рис. 265).

5) Проекцией куба на плоскость, перпендикулярную его диагонали, является правильный шестиугольник.

Проекцией октаэдра на плоскость его грани также является правильный шестиугольник.

Докажите эти утверждения и найдите, какие еще правильные многоугольники можно получить, проектируя правильные многогранники.

▲ § 24. СИММЕТРИЯ

24.1. Общее понятие о симметрии

Симметрией фигуры вообще называется свойство фигуры, состоящее в том, что существует ее движение, совмещающее ее саму с собой.

Мы уже говорили о симметрии шара, правильных призм и пирамид. Любой параллелепипед обладает симметрией: у него есть центр симметрии. Симметрией обладают фигуры вращения.

Симметрия играет огромную роль в искусстве, архитектуре, где она постоянно встречается в достаточно точном геометри-

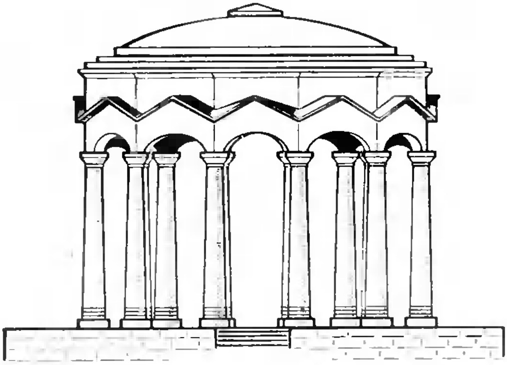


Рис. 266

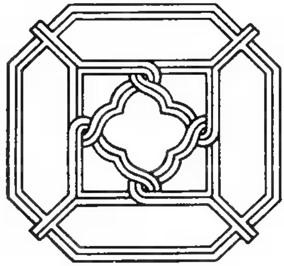


Рис. 267

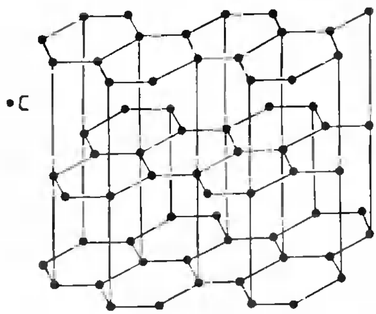


Рис. 268

ческом смысле — как совмещаемость частей при самосовмещаемости целого (рис. 266, 267).

Учение о симметрии составляет важную и обширную часть геометрии, особенно учение о симметрии кристаллов, которое включается в науку, называемую геометрической кристаллографией.

Известно, что атомы в кристаллах образуют кристаллическую решетку, т. е. некую правильную систему фигур, совмещающихся одна с другой движениями (рис. 268).

Помимо кристаллов, симметрия в природе наблюдается у живых организмов. У растений наблюдается симметрия цветов, симметрия расположения листьев. Среди животных особенно примечательны в этом смысле морские звезды.

В последнее время общее учение о симметрии приобрело большое значение в физике, с ним связаны основные законы природы.

24.2. Элементы симметрии

Если некоторое преобразование симметрии совмещает фигуру саму с собой, то, повторив это преобразование, мы снова совместим фигуру саму с собой, т. е. опять получим преобразование симметрии. Например, совместив фигуру саму с собой поворотом, можно этот поворот повторить.

Если фигура самосовмещается в результате поворота вокруг оси, то эта ось называется ее осью поворотной симметрии. Число поворотов вокруг оси, которыми фигура самосовмещает-

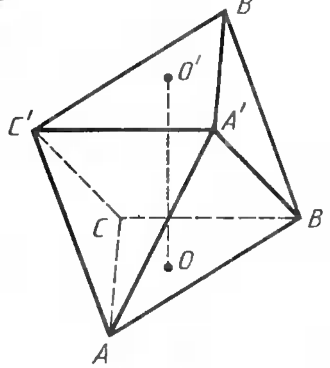


Рис. 269

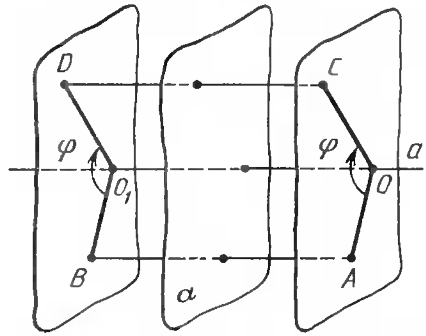


Рис. 270

ся, называется порядком оси (тождественный поворот, т. е. на $0°$, включается в это число, но ось, вокруг которой возможен лишь тождественный поворот, не считается, понятно, осью симметрии). Например, правильная n-угольная призма имеет ось поворотной симметрии n-го порядка.

У фигур вращения ось бесконечного порядка.

Если фигура совмещается сама с собой в результате последовательно выполненных поворота вокруг некоторой прямой a и затем отражения в некоторой плоскости α, перпендикулярной прямой a, то говорят, что a является осью зеркальной симметрии данной фигуры (или, короче, зеркальной осью). Так же как для оси симметрии, для зеркальной оси определяется ее порядок. Например, у октаэдра есть зеркальная ось порядка шесть — она проходит через центры его параллельных граней (рис. 269).

Движение, которое получается в результате последовательно выполненных поворота вокруг прямой и отражения в плоскости, перпендикулярной этой прямой, называется **зеркальным поворотом.** Проверьте, что порядок, в котором выполняются в данном случае поворот и отражение, не имеет значения (рис. 270).

Ось зеркального поворота порядка $2n$ является осью (поворотной) симметрии порядка n, так как дважды повторенный зеркальный поворот равносилен повороту на удвоенный угол.

Оба вида осей поворота вместе с плоскостями симметрии и центром симметрии, если они есть у фигуры, называются ее **элементами симметрии.**

24.3. Симметрия правильных многогранников

Правильные многогранники — самые симметричные из всех многогранников. Это означает следующее. Если взять на таком

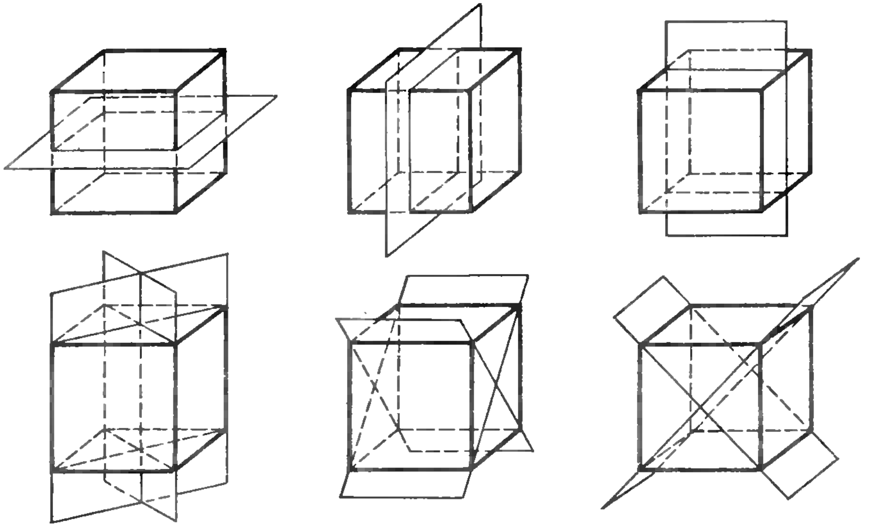


Рис. 271

многограннике какую-нибудь вершину A, подходящее к ней ребро a и грань α, подходящую к этому ребру, и еще любой такой же набор A', a', α', то существует такое самосовмещение многогранника, которое вершину A отображает на A', ребро a — на a', грань α — на α'. Покажем это.

Так как любые две грани правильного многогранника равны, то существует движение, которое одну из них переведет в другую. В результате его (поскольку двугранные углы равны) многогранник самосовместится или перейдет в многогранник, симметричный исходному относительно плоскости второй грани. В последнем случае отражение в плоскости этой грани завершает процесс самосовмещения многогранника.

Укажем *элементы симметрии куба.*

1. Центр симметрии — центр куба.

2. Плоскости симметрии (рис. 271): 1) три плоскости симметрии, перпендикулярные ребрам в их серединах; 2) шесть плоскостей симметрии, проходящие через противоположные ребра.

3. Оси симметрии: 1) три оси 4-го порядка, проходящие через центры граней (рис. 272, *а*); 2) шесть осей 2-го порядка, проходящие через середины противоположных ребер (рис. 272, *б*); 3) четыре зеркальные оси 6-го порядка, проходящие через противоположные вершины (рис. 272, *в*).

Это самый интересный и не сразу видный элемент симметрии куба. Сечение куба плоскостью, проходящей через его центр перпендикулярно диагонали, представляет правильный шестиугольник; при повороте куба вокруг диагонали на угол

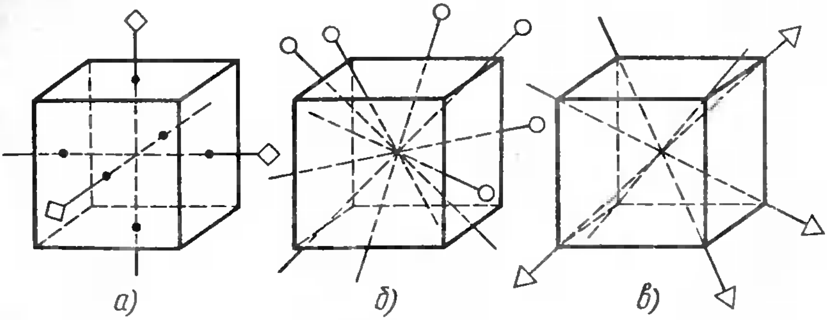


Рис. 272

$\frac{1}{6}\cdot 360^\circ = 60^\circ$ шестиугольник отображается на себя, а куб в целом нужно еще отразить в плоскости шестиугольника.

Октаэдр двойствен кубу, и потому у него те же элементы симметрии с той разницей, что плоскости симметрии и оси, проходящие у куба через вершины и центры граней, у октаэдра проходят наоборот: через центры граней и вершины. Так, зеркальная ось 6-го порядка проходит у октаэдра через центры противоположных граней.

Теперь рассмотрим *элементы симметрии правильного тетраэдра:*

1. Шесть плоскостей симметрии, каждая проходит через ребро и середину противоположного ребра.

2. Четыре оси 3-го порядка, проходящие через вершины и центры противоположных им граней.

3. Три зеркальные оси 4-го порядка, проходящие через середины противоположных ребер.

Рассммотрите сами элементы симметрии додекаэдра и икосаэдра, вспомнив, что они двойственны. ▼

ВЫВОДЫ

1. В этой главе мы рассмотрели важные пространственные фигуры: цилиндры, конусы, многогранники. Определения этих фигур даны в пп. 19.1, 21.1, 23.1.

2. Для цилиндров и конусов рассмотрели их сечения плоскостями, параллельными основаниям цилиндров и конусов (пп. 19.1 и 21.1). Все такие сечения цилиндра равны друг другу (и равны основаниям цилиндра). У конусов они подобны основаниям.

3. Выделили ряд частных случаев конусов и цилиндров. **Прямой цилиндр** — это цилиндр, у которого образующие перпендикулярны основанию цилиндра.

Прямой цилиндр, основанием которого является круг, называется цилиндром вращения. Осью цилиндра вращения является отрезок, соединяющий центры его оснований.

Конус вращения — это конус, основание которого круг, а вершина проектируется в центр этого круга. Ось конуса вращения — это отрезок, соединяющий вершину конуса с центром его основания.

Были рассмотрены осевые сечения цилиндров и конусов вращения.

4. Весьма общие определения, данные нами конусам и цилиндрам, позволяют рассматривать призмы как частный случай цилиндров, а пирамиды как частный случай конусов. Достоинство такого подхода подтвердится и в следующей главе при рассмотрении вопроса об объемах цилиндров и конусов.

Призма — это цилиндр, основание которого — многоугольник.

Пирамида — это конус, основание которого — многоугольник.

Призма называется **правильной,** если она прямая и ее основанием является правильный многоугольник.

Правильная пирамида — это такая пирамида, в основании которой лежит правильный многоугольник и все боковые ребра равны.

6. Пирамиды и призмы являются многогранниками, так как их поверхности состоят из конечного числа многоугольников. Среди многогранников (§ 23) кроме призм и пирамид мы выделили еще правильные многогранники (п. 23.3). Существует всего пять правильных многогранников: *куб, правильный тетраэдр, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр.*

7. Для всех рассмотренных нами пространственных фигур мы рассмотрели вопрос об их симметрии, т. е. о возможности их самосовмещения движениями, отличными от тождественного. Для цилиндров и конусов это сделано в § 19—22, а для правильных многогранников — в § 24.

Задачи к главе IV

1. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 1. Вычислите радиус наибольшего шара, который можно уместить в этом цилиндре, и радиус наименьшего шара, в котором можно уместить этот цилиндр.

2. В цилиндре, у которого $H=2R=2$, надо разместить два одинаковых шара. Каков наибольший радиус у этих шаров?

3. $ABCA_1B_1C_1$ — прямая треугольная призма, $|AB|=|BC|=|BB_1|=1$, $\angle ABC=90°$.

1) Какого вида фигура получается в ее сечении плоскостями: а) AB_1C_1; б) $A_1C_1B_1$; в) перпендикулярными ребру AB; г) перпендикулярными прямой AC; д) проходящими через BC; е) проходящими через A_1C_1?

2) Какого вида фигура получается при ее проектировании на плоскость: а) ABC; б) AA_1C; в) ACB_1; г) A_1BC?

3) Вычислите: а) $|B_1K|$, где K — середина AC; б) расстояние от C до плоскости AA_1B_1; в) расстояние от B до плоскости ACC_1; г) расстояние от B_1 до плоскости A_1BC_1; д) расстояние от A до плоскости A_1BC; е) расстояние от прямой CC_1 до плоскости ABB_1.

4) Вычислите углы между: а) (BA_1) и (BC_1); б) (A_1B) и (ABC); в) (AC) и (BB_1C_1); г) (B_1C) и (A_1BB_1); д) (ABC) и (AA_1C_1); е) (AB_1C) и $(A_1B_1C_1)$; ж) (A_1BC_1) и (BB_1C_1); з) (AB_1C_1) и $(A_1B_1C_1)$; и) (AB_1C_1) и (CB_1A_1).

5) Какова площадь сечения, составляющего с основанием угол 60° и проходящего через AC?

6) В каких границах лежат площади сечений из п. 1 (в — е)?

7) Можно ли: а) описать сферу вокруг этой призмы; б) вписать в нее сферу?

4. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведены сечения A_1BD и CB_1D_1. а) Докажите, что диагональ AC_1 параллелепипеда делится ими на три равные части. б) Докажите, что она пересекает эти сечения в точках пересечения медиан.

5. $ABCA_1B_1C_1$ — прямая треугольная призма, у которой все ребра равны 1.

1) Каков вид ее граней?

2) Какого вида фигура получается в сечении плоскостью: а) BCA_1; б) проходящей через боковое ребро; в) проходящей параллельно боковой грани; г) перпендикулярной боковому ребру; д) перпендикулярной ребру AC; е) проходящей через ребро основания; ж) параллельной плоскости BCA_1; з) проходящей через B_1 параллельно AC?

3) Какого вида фигура получается при ее проектировании на плоскость: а) параллельную основанию; б) параллельную боковой грани; в) BCA_1?

4) Вычислите расстояние: а) A_1C; б) OO_1, где O и O_1 — центры оснований; в) B_1O; г) от бокового ребра до плоскости параллельной грани; д) от OO_1 до плоскости параллельной грани.

5) Вычислите угол между: а) диагональю боковой грани и плоскостью основания; б) плоскостями боковых граней; в) (ACB_1) и плоскостью основания; г) (ACB_1) и плоскостями боковых граней.

6) Вычислите площадь сечения, составляющего с основанием угол 45° и проходящего через AC. В каких границах лежат площади сечений из п. 2 (б, в, д, ж, з, и)?

7) Можно ли: а) вокруг призмы описать сферу; б) вписать в нее сферу? Если можно, то каков ее радиус?

6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная четырехугольная призма. $AB=1$, $AA_1=2$.

1) Каков вид ее граней?

2) Какого вида фигура получается в ее сечении плоскостями, проходящими: а) через боковое ребро; б) через ребро основания; в) параллельно основанию; г) параллельно плоскости ACA_1; д) через AC; е) через B_1D; ж) параллельно плоскости A_1DC_1?

3) Какого вида фигура получается при проектировании ее на плоскость: а) параллельную основанию; б) параллельную боковой грани; в) параллельную плоскости ACA_1?

4) Вычислите расстояния: а) BD_1; б) OO_1, где O и O_1 — центры оснований; в) CO_1; г) от середины диагонали до плоскостей граней призмы; д) от бокового ребра до параллельной ему диагональной плоскости.

5) Вычислите углы между: а) диагональю и ребрами; б) диагональю и плоскостями граней; в) плоскостью AB_1C_1 и плоскостями граней; г) плоскостью BDC_1 и плоскостью основания; д) плоскостью BDC_1 и плоскостями боковых граней.

6) Вычислите площадь сечения, проходящего через ребро основания и составляющего с ним угол 60°. В каких границах лежат площади сечений из п. 2 (а, б, г, д)?

7) Можно ли вокруг призмы описать сферу? вписать в нее сферу? Если можно, то каков ее радиус?

7. Образующая поверхности конуса равна 1. В каких границах лежит: а) радиус описанного около него шара; б) радиус вписанного в него шара?

8. Равносторонний треугольник вращается вокруг: а) высоты; б) стороны; в) прямой, параллельной высоте и проходящей через вершину. Нарисуйте получившееся тело вращения.

9. Квадрат вращается вокруг: а) диагонали; б) прямой, параллельной диагонали и проходящей через вершину. Нарисуйте получившееся тело вращения.

10. Ромб вращается вокруг: а) стороны; б) прямой, перпендикулярной стороне и проходящей через вершину ромба. Нарисуйте получившееся тело вращения.

11. Сектор круга вращается вокруг: а) крайнего радиуса; б) радиуса, который делит его пополам; в) диаметра, параллельного хорде, соединяющей концы его крайних радиусов. Нарисуйте получившееся тело вращения.

ГЛАВА V.

ОБЪЕМЫ ТЕЛ И ПЛОЩАДИ ИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

§ 25. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ И ОБЪЕМА

25.1. Простые тела

Каждый имеет представление о площади и объеме и умеет измерять их в простейших случаях.

Наша задача состоит в том, чтобы дать точные определения площади и объема. При этом будем исходить из того, что ясно и без геометрии. Ясно, например, что одинаковые участки земли имеют одну и ту же площадь и, если участок составляется из двух участков, его площадь равна сумме площадей этих участков.

Точно так же одинаковые тела имеют один и тот же объем, а когда из двух тел составляется одно, то объемы их складываются.

Мыслимые в геометрии плоские фигуры и тела могут быть настолько сложно устроены, что приписать им всем площадь и объем с указанными свойствами нельзя. Поэтому выделим **простые тела** и простые плоские фигуры (по аналогии с участками земли мы называем их простыми участками).

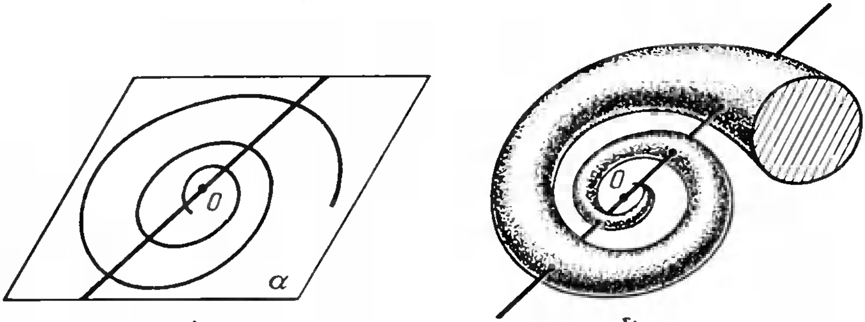
Фигура называется **ограниченной**, если она имеет конечные размеры, т. е. лежит внутри некоторого шара.

Тело будем называть простым, если, во-первых, оно ограничено и, во-вторых, каждая прямая, имеющая с телом общие точки, пересекает его поверхность по конечному числу отрезков и отдельных точек.

Всякое реальное тело можно считать простым, пересечение поверхности тела с прямой по бесконечному числу отдельных точек и отрезков мыслимо лишь для идеального геометрического тела. Очевидно, любой многогранник является простым телом. Все тела, для которых будем вычислять объемы, являются простыми.

Приведем пример непростого тела. Возьмем в какой-либо плоскости α спираль с бесконечным числом витков, скручивающуюся к некоторой точке O (рис. 273, a). Вокруг этой спирали построим «улитку», также скручивающуюся к этой точке O (рис. 273, $б$). Любая прямая, проходящая через O в плоскости α, пересекает поверхность «улитки» по бесконечному числу точек.

Для определения площади нам потребуются плоские фигуры, аналогичные простым телам. Назовем их **простыми**



а) б)

Рис. 273

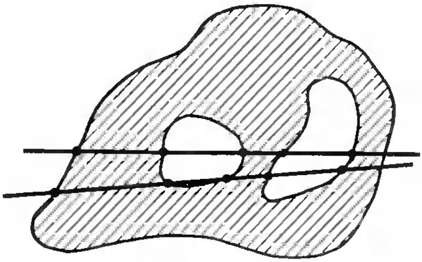


Рис. 274

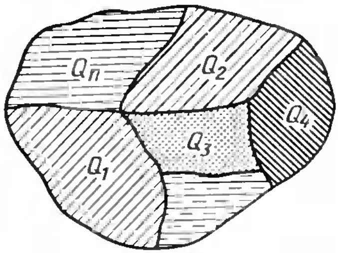


Рис. 275

участками. Во-первых, они, как и простые тела, ограничены. А во-вторых, их границы обладают теми же свойствами, что и поверхности простых тел. А именно границу простого участка любая прямая пересекает по конечному числу отрезков и отдельных точек или вообще не пересекает (рис. 274). Многоугольники и выпуклые участки являются простыми участками.

Так как в этой главе рассматриваем только простые тела и участки, то слово «простой» опускаем и говорим просто о телах и участках.

Будем говорить, что **тело (участок) составлено из нескольких тел (участков),** если общими точками любых двух из этих составляющих тел (участков) являются разве лишь точки их поверхностей (их границ) (рис. 275).

З а м е ч а н и е. Могут возникнут вопросы: что такое тело? Что такое поверхность тела? Что такое граница участка? И т. п. Ответы на эти вопросы вы можете найти в § 35.

25.2. Определение площади и объема

Теперь можно дать определение площади, включив в него лишь те два свойства, о которых говорилось в примере об участках земли.

О п р е д е л е н и е. **Площадью участка называется положительная величина, определенная для каждого участка так, что: 1) равные участки имеют равные площади; 2) если участок составлен из конечного числа участков, то его площадь равна сумме их площадей.**

Определение объема аналогично определению площади.

О п р е д е л е н и е. **Объемом тела называется положительная величина, определенная для тела так, что: 1) равные тела имеют равные объемы; 2) если тело составлено из конечного числа тел, то его объем равен сумме их объемов.**

Для сравнения обратим внимание еще на то, что длина отрезка характеризуется такими же свойствами: это положительная величина, определенная для каждого отрезка так, что: 1) равные отрезки имеют равные длины; 2) если отрезок составлен из конечного числа отрезков, то его длина равна сумме длин отрезков.

Сравнивая свойства площади, объема и длины, видим полное их сходство, хотя это разные величины, так как относятся к разным объектам: длины — к отрезкам, площади — к участкам, объемы — к телам.

Длины, площади и объемы измеряются в разных единицах. Эти единицы согласуются друг с другом следующим образом. Пусть выбрана единица длины — единичный отрезок, т. е. такой, длина которого считается равной единице. Тогда за единицу измерения площади принимают площадь единичного квадрата, т. е. квадрата, стороной которого служит единичный отрезок. За единицу объема принимается объем единичного куба, т. е. куба, ребром которого служит единичный отрезок.

Так принято в геометрии и в физике. На практике же применяют разные единицы: длину измеряют метрами, миллиметрами, дюймами, футами и т. д., для измерения больших расстояний в астрономии применяют следующие единицы длины: астрономическую единицу, световой год и парсек; площади — квадратными метрами, гектарами, акрами; объемы — кубическими метрами, литрами, галлонами, баррелями, бушелями и т. д.[1].

Для самих понятий площади и объема выбор единицы не играет роли, и совершенно необязательно, например, считать за единицу объема, скажем, объем единичного куба. Можно было бы принять за единицу объема объем любого другого многогранника. Только это было бы не так удобно.

Ради простоты мы выберем раз и навсегда единичный отрезок, а вместе с ним единичный квадрат и единичный куб. Тогда под длинами, площадями и объемами будем понимать их численные значения в этих единицах.

---

[1] Это единицы объема, применяемые в США и Англии. Бушелями измеряют объем зерна, баррелями — объем нефти, галлонами — объем бензина.

25.3. Существование площади и объема

В определениях площади и объема не говорится о том, что такие величины в самом деле существуют. Их существование нужно еще доказать. Так, для объема справедлива следующая теорема:

Теорема. ***При выбранном единичном кубе каждому телу соответствует, и притом единственное, положительное число — численное значение объема при данной единице.***

При изменении единицы это число изменяется так: если берется в k раз меньший (больший) единичный отрезок, то численное значение объема увеличивается (уменьшается) в k^3 раз.

Аналогичная теорема выполняется для площади, но с коэффициентом изменения k^2.

Доказывать эти теоремы не будем.

Вообще вопрос о площади и об объеме трудный, он не может быть изложен в школьном курсе вполне строго. То же относится к площади поверхности. Все эти вопросы принадлежат, по существу, к трудным разделам математики. Поэтому не будем стремиться к особой строгости, а установим нужные результаты, руководствуясь больше соображениями наглядности.

§ 26. ОБЪЕМ ПРЯМОГО ЦИЛИНДРА

26.1. Теорема об объеме прямого цилиндра

Теорема. ***Объем прямого цилиндра равен произведению площади его основания и высоты.***

Замечание. У прямого цилиндра высота равна длине образующей, но здесь лучше говорить о высоте, потому что, как будет доказано, объем не только прямого, но и всякого цилиндра равен произведению площади основания и высоты.

Идея доказательства этой теоремы опирается на следующие два утверждения:

1) *Объем прямого цилиндра пропорционален высоте, т. е. длине его образующей.*

Например, объем жидкости, наливаемой в цилиндрическую мензурку, пропорционален высоте столбика жидкости.

Представим себе прямой цилиндр как бревно постоянного сечения. Будем распиливать его на чурки (рис. 276). Зная длину чурок, мы можем сравнивать их объемы. Во сколько раз длиннее чурка, во столько же раз будет больше ее объем, т. е. объем чурки пропорционален ее длине. Но что такое

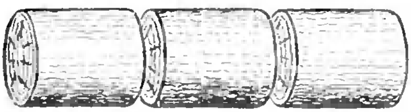


Рис. 276

ровно отпиленная чурка, как не прямой цилиндр? Мы видим, что объем прямого цилиндра пропорционален длине его образующей, т. е. высоте.

2) *Объем прямого цилиндра пропорционален площади его основания.*

Для того чтобы убедиться в этом, будем колоть напиленные нами чурки. Раскалывая чурку, мы ударяем ее по верхнему основанию. Какую долю площади верхнего основания чурки отколем, такую же долю объема получим у отколотого полена (рис. 277). Полено, если оно ровное (как и чурка), тоже цилиндр. Таким образом, какую долю составляет площадь его основания, такую же долю составляет и его объем от объема исходного цилиндра. Это значит, что объем цилиндра пропорционален площади основания.

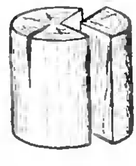


Рис. 277

Итак, объем прямого цилиндра пропорционален и площади основания, и высоте, следовательно, пропорционален их произведению.

Обозначив объем V, площадь основания S, высоту H, можно написать:

$$V = aSH,$$

где число a — коэффициент пропорциональности (один и тот же для всех прямых цилиндров).

В частности, прямым цилиндром является единичный куб. У него $V=1$, $S=1$, $H=1$. Поэтому $a=1$. Следовательно, $V=SH$, как и утверждает теорема.

26.2*. Подробное доказательство теоремы об объеме прямого цилиндра

Прямой цилиндр C однозначно определяется его основанием B и высотой D (отрезком, а не длиной). Поэтому объем $V(C)$ цилиндра C зависит от B и D, т. е. является их функцией:

$$V(C) = V(B, D).$$

Сначала покажем, что эта функция при фиксированном D обладает свойствами площади, а при фиксированном B — свойствами длины.

Рассмотрим цилиндры с основаниями на какой-либо данной плоскости с данной высотой D (рис. 278). Тогда объем такого цилиндра зависит только от основания B, так что можно написать $V(C)=f(B)$. Если основания B и B' таких цилиндров C и C' равны, то и цилиндры C и C' равны, и, значит, равны их объемы: $V(C)=V(C')$, т. е. $f(B)=f(B')$. Следовательно, если фигуры B и B' равны, то $f(B)=f(B')$.

Если основание B составлено из простых участков B_1 и B_2, то цилиндр C составлен из C_1 и C_2, и, значит,

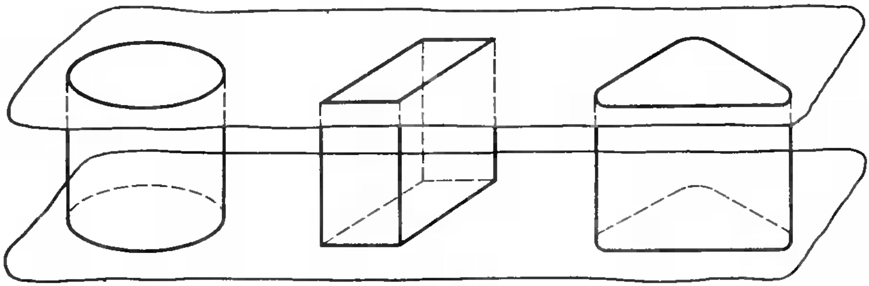


Рис. 278

$$V(C)=V(C_1)+V(C_2), \text{ т. е. } f(B)=f(B_1)+f(B_2).$$

Таким образом, положительная величина $f(B)$ удовлетворяет двум условиям:

1) если участки B и B' равны, то $f(B)=f(B')$;

2) если участок B составлен из B_1 и B_2, то

$$f(B)=f(B_1)+f(B_2).$$

Но этими условиями и определяется площадь $S(B)$. Поэтому величина $f(B)$ и есть площадь, только, может быть, измеренная в других единицах. Поэтому она отличается от площади $S(B)$ на положительный множитель, т. е. $f(B)=kS(B)$.

Получаем, что $V(C)=f(B)=kS(B)$.

Заметим, что коэффициент k мы получили для цилиндров фиксированной высоты D. Каждому значению D ставится в соответствие свой коэффициент k, т. е. k есть функция высоты D. Поэтому мы должны считать, что для каждой высоты D коэффициент k будет свой, т. е. $k=k(D)$. Тогда в общем случае получаем, что

$$V(C)=k(D)\cdot S(B). \tag{1}$$

Покажем теперь, что величина $k(D)$ есть не что иное, как длина отрезка D.

Рассмотрим прямые цилиндры C с единичным квадратом B_0 в основании, т. е. прямые призмы с квадратом в основании. Для такой призмы $S(B_0)=1$, и потому по формуле (1) ее объем

$$V(C)=k(D).$$

Если высоты D и D' таких призм равны, то и сами призмы C и C' равны, поэтому для них $V(C)=V(C')$, т. е. $k(D)=k(D')$.

Если призма C с высотой D составлена из призм C_1 и C_2 с высотами D_1 и D_2, то $V(C)=V(C_1)+V(C_2)$, т. е.

$$k(D)=k(D_1)+k(D_2).$$

Таким образом, неотрицательная величина $k(D)$ обладает двумя свойствами:

1) если высоты, т. е. отрезки D и D', равны, то $k(D)=k(D')$;

2) если высота, т. е. отрезок D, составлена из отрезков D_1 и D_2, то

$$k(D)=k(D_1)+k(D_2).$$

Но этими свойствами характеризуется длина отрезка. Поэтому величина $k(D)$ и есть длина, только измеренная, может быть, в других единицах. Тем самым $k(D)$ отличается от длины H отрезка D на постоянный множитель, т. е. $k(D)=aH$, где $a=\text{const}>0$.

И так как $k(D)$ — это объем $V(C)$ призмы C, то

$$V(C)=k(D)=aH.$$

Поскольку C — призма с площадью основания 1, то при $H=1$ она оказывается единичным кубом, т. е. при $H=1$ значение $V(C)=1$, и, значит, $a=1$. Таким образом, $k(D)=H$, и из (1) для объема любого цилиндра получаем, что $V(C)=SH$.

Задачи к § 26

Задачи на объем цилиндра

26.1. Напишите формулу для объема цилиндра вращения. а) Выразите из нее высоту цилиндра, его радиус. б) Пусть все размеры цилиндра увеличились в два раза. Во сколько раз увеличился его объем? в) Объем прямого цилиндра требуется уменьшить в два раза. Как это можно сделать? г) Жидкость из полной цилиндрической пробирки переливают в другую, радиус которой в два раза меньше. Во сколько раз она должна быть выше? д) Из проволоки диаметром d_1 делают на волочильном станке проволоку диаметром d_2. Исходная проволока имела длину L. Какую длину будет иметь полученная проволока?

26.2. а) В цилиндре сделали сквозное цилиндрическое отверстие (ось цилиндра совпадает с осью отверстия), его радиус составляет $\frac{1}{2}$ радиуса цилиндра. Какая часть объема цилиндра осталась? б) С цилиндрической заготовки сняли при обработке стружку на 0,1 часть радиуса основания. Какая часть объема цилиндра осталась?

26.3. Как вы будете делить на равновеликие части торт, имеющий форму цилиндра?

26.4. Как разделить цилиндр на две равновеликие фигуры?

26.5. В цилиндрическом сосуде находится жидкость. Предложите различные способы, чтобы узнать, больше или меньше половины объема сосуда налито.

26.6. В цилиндрический сосуд была налита доверху вода. Сосуд наклонили на некоторый угол. Как узнать, какой объем воды вылился?

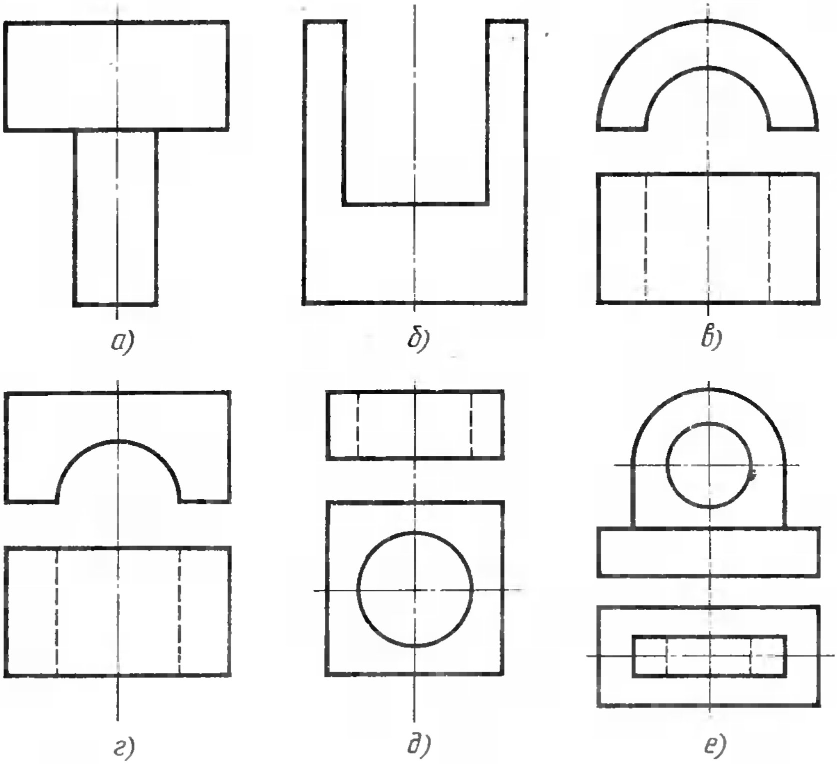


Рис. 279

26.7. Бензин в цилиндрической бочке находится ниже сливного крана. Бочку стали наклонять до тех пор, пока бензин не начал из нее вытекать. Можете ли вы узнать, сколько осталось бензина, не выливая его? (Все измерения — по поверхности бочки.)

26.8. а) Вода заполняет горизонтальную трубу на $\frac{3}{4}$ ее диаметра. Скорость течения воды известна. Как определить расход воды? б) Как можно определить расход воды в реке? в) В цилиндрический бак налита вода. Основание бака горизонтально. В дне бака сделано отверстие, через которое вытекает вода. Как узнать, через сколько времени она выльется?

26.9. Бумага свернута в цилиндрический рулон. Какие надо сделать замеры, чтобы узнать, сколько квадратных метров бумаги имеется в рулоне?

26.10. Прямоугольник со сторонами d_1 и d_2 вращают вокруг: а) его средних линий; б) каждой из неравных сторон. Чему равен объем фигуры вращения?

26.11. В каких границах лежит объем цилиндра, у которого: а) диагональ осевого сечения равна 1; б) площадь осевого сечения равна S?

26.12. Какие надо сделать замеры на указанных видах, чтобы вычислить объем тела (рис. 279)?

Задачи на объем прямой призмы

26.13. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1 проводится сечение через (AB). Вычислите объемы полученных частей куба, если плоскость сечения составляет с плоскостью основания угол: а) $30°$; б) $45°$; в) φ.

26.14. Ребра прямоугольного параллелепипеда равны 1, 2, 3. Через его ребро проводится сечение под углом $60°$ к основанию. В каком отношении оно делит его объем? (Рассмотрите разные случаи.)

26.15. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ грани $ABCD$ и AA_1B_1B — квадраты со стороной d, угол между ними острый и равен φ. Найдите объем параллелепипеда. Изменится ли результат, если угол будет прямым или тупым?

26.16. Как разделить куб на две равновеликие части?

26.17. Многогранник, являющийся частью куба, задан тремя проекциями (рис. 280). Какие надо сделать замеры на проекциях, чтобы вычислить его объем?

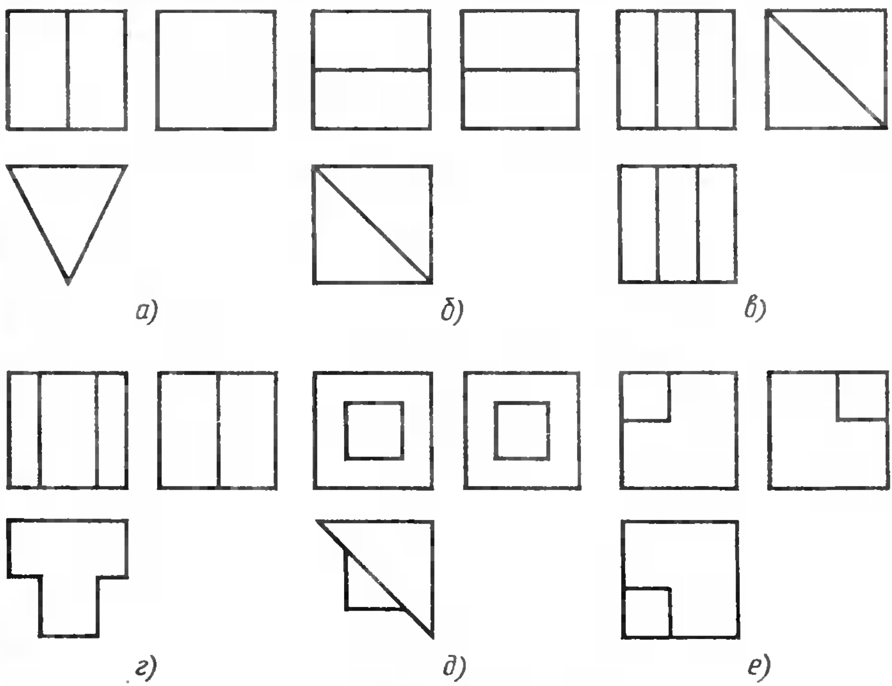


Рис. 280

26.18. Два шара радиусом 1 лежат в прямоугольном параллелепипеде так, что каждый из них имеет по одной общей точке с пятью гранями. Каков наименьший объем такого параллелепипеда?

26.19. Площадь боковой грани правильной треугольной призмы равна 1. В каких границах лежит ее объем?

26.20. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 1, одна сторона его основания в два раза больше другой. В каких границах лежит его объем?

26.21. Из конуса с радиусом основания R и высотой H вырезают цилиндр наибольшего объема. Чему он равен? Решите такую же задачу для прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием; для правильной треугольной призмы.

26.22. Из шара радиусом R вырезают цилиндр наибольшего объема. Чему равен этот объем? Решите такую же задачу для прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием; для правильной треугольной призмы.

§ 27. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОБЪЕМА ИНТЕГРАЛОМ

Теорема. ***Пусть тело T лежит между параллельными опорными плоскостями α и β и $\alpha(x)$ — плоскость, лежащая между ними и удаленная от α на расстояние x*** (рис. 281). ***Пусть сечение тела T плоскостью $\alpha(x)$ имеет площадь S(x) и функция S(x) непрерывна. Тогда объем V(T) тела T выражается равенством***

$$V(T)=\int_0^H S(x)\,dx, \qquad (1)$$

где H — расстояние между α и β.

▲ Доказательство. Обозначим через $V(x)$ объем части тела T, лежащей между плоскостями α и $\alpha(x)$, где $0<x\leqslant H$. Очевидно, $V(T)=V(H)$. Кроме того, положим $V(0)=0$.

Покажем, что $V(x)$ имеет своей производной $S(x)$.

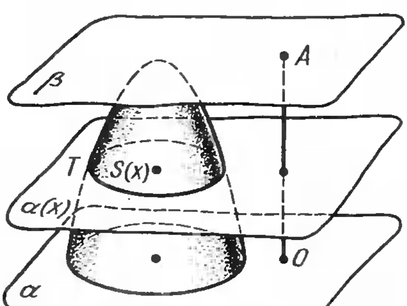


Рис. 281

Фиксируем некоторое значение x из интервала $(0, H)$, выберем $\Delta x>0$ и рассмотрим слой ΔT тела T между плоскостями $\alpha(x)$ и $\alpha(x+\Delta x)$ (рис. 282, *а*). Если Δx достаточно мало, то слой ΔT можно рассматривать приближенно как прямой цилиндр с высотой Δx. Это означает следующее. Для выбранного Δx можно построить прямые цилиндры $\Delta C'$ и $\Delta C''$ с основа-

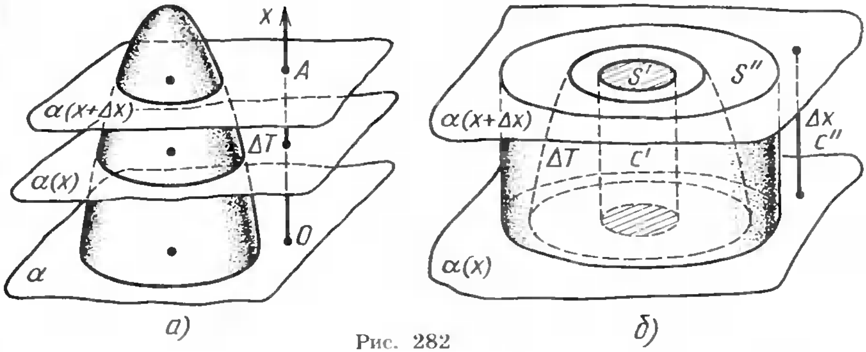


Рис. 282

ниями в плоскостях $\alpha(x)$ и $\alpha(x+\Delta x)$, такие, что цилиндр $\Delta C'$ содержится в ΔT, цилиндр $\Delta C''$ содержит ΔT (рис. 282, *б*) и площади их оснований $S'(\Delta x)$ и $S''(\Delta x)$ стремятся к $S(x)$, когда $\Delta x \to 0$, т. е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} S'(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} S''(\Delta x) = S(x). \quad (2)$$

(Последнее утверждение, верное в общем случае, можно проверить для каждого из конкретных тел, которые будут рассмотрены далее.)

Объемы прямых цилиндров $\Delta C'$ и $\Delta C''$ выражаются равенствами

$$V(\Delta C') = S'(\Delta x) \cdot \Delta x, \quad V(\Delta C'') = S''(\Delta x) \cdot \Delta x. \quad (3)$$

Объем слоя ΔT обозначим через ΔV. Так как цилиндр $\Delta C'$ содержится в слое ΔT, а цилиндр $\Delta C''$ содержит слой ΔT, то

$$V(\Delta C') \leqslant \Delta V \leqslant V(\Delta C''). \quad (4)$$

Разделим все выражения в (4) на $\Delta x > 0$ и, использовав (3), получим:

$$S'(\Delta x) \leqslant \frac{\Delta V}{\Delta x} \leqslant S''(\Delta x). \quad (5)$$

Переходя к пределу в (5) при $\Delta x \to 0$ и учитывая (2), получим, что существует

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = S(x), \quad (6)$$

т. е. производная функции $V(x)$ равна $S(x)$.

Следовательно, функция $V(x)$ является первообразной функции $S(x)$. При этом $V(0)=0$ и $V(H)=V(T)$. Поэтому по формуле Ньютона — Лейбница, доказанной в курсе алгебры и начал анализа, имеем:

$$V(T) = V(H) - V(0) = \int_0^H S(x)\,dx,$$

что и требовалось доказать. ▼

§ 28. ОБЪЕМЫ НЕКОТОРЫХ ТЕЛ

28.1. Объем цилиндра

В § 26 мы вывели формулу для объема прямого цилиндра. Она верна и для любого цилиндра.

Теорема *(об объеме цилиндра).* ***Объем цилиндра (в частности, призмы) равен произведению площади основания на высоту:***

$$V = SH.$$

Доказательство. Пусть $Q(x)$ — сечение данного цилиндра плоскостью, параллельной плоскости основания и проведенной на расстоянии x от нее.

Расстояние x меняется от 0 до H. Площади $S(x)$ всех сечений $Q(x)$ равны площади основания S: $S(x) = S$. По формуле (1) § 27

$$V = \int_0^H S(x)\,dx = \int_0^H S\,dx = S\int_0^H dx = SH. \blacksquare$$

28.2. Объем конуса

Теорема *(об объеме конуса).* ***Объем конуса (в частности, пирамиды) равен одной трети произведения площади основания на высоту:***

$$V = \frac{1}{3}SH.$$

Доказательство. Сечение конуса плоскостью, параллельной основанию, подобно основанию. Если плоскость проходит на расстоянии x от вершины, то коэффициент подобия равен $\frac{x}{H}$ (рис. 283). Поэтому площадь сечения $S(x)$ такой плоскостью равна:

$$S(x) = \left(\frac{x}{H}\right)^2 S,$$

где S — площадь основания.

По формуле (1) § 27 объем конуса K будет:

$$V(K) = \int_0^H S(x)\,dx = \int_0^H S\frac{x^2}{H^2}dx =$$

$$= \frac{S}{H^2}\int_0^H x^2dx = \frac{S}{H^2}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^H = \frac{1}{3}SH.$$

Следовательно,

$$V = \frac{1}{3}SH. \blacksquare$$

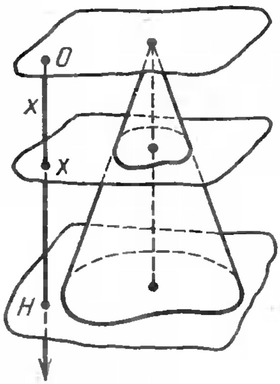


Рис. 283

28.3. Объем шара

Теорема *(об объеме шара). Объем шара радиусом R выражается формулой*

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

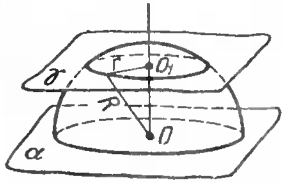


Рис. 284

Доказательство. Рассмотрим шар радиусом R. Удобнее взять полушар — часть шара, ограниченную плоскостью, проходящей через центр (рис. 284).

Плоскость γ, параллельная плоскости α и проходящая от нее на расстоянии x, пересекает шар по кругу радиусом $r = \sqrt{R^2 - x^2}$. Площадь $S(x)$ этого круга равна $\pi(R^2 - x^2)$. Объем полушара равен, очевидно, половине объема V шара, а расстояние H в формуле (1) § 27 равно R. Поэтому эта формула дает:

$$\frac{1}{2}V = \pi\int_0^R (R^2 - x^2)\,dx.$$

Вычисляем:

$$\int_0^R (R^2 - x^2)\,dx = \left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^R = \frac{2}{3}R^3.$$

Следовательно, $\frac{1}{2}V = \frac{2}{3}\pi R^3$ и $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. ■

Задачи к § 28

Задачи к п. 28.1

Основная задача

28.1. Докажите, что объем наклонной треугольной призмы равен произведению площади ее перпендикулярного сечения и длины бокового ребра. Обобщите этот результат для случая произвольной наклонной призмы. Можно ли применить этот результат для вычисления объема прямой призмы?

* * *

28.2. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ ребро основания равно 1, а боковое ребро равно 2. Вычислите ее объем, если вершина A_1 проектируется в: а) точку C; б) середину ребра BC; в) центр треугольника ABC.

28.3. В основании призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Ее боковое ребро равно 1. Вычислите ее объем, если: а) боковое ребро составляет с основанием угол 45°; б) грань BCC_1B_1 — прямоугольник, плоскость которого наклонена к основанию под углом 30°; в) ребро AA_1 составляет с ребрами AB и AC углы 60°; г) две ее боковые грани перпендикулярны основанию; д) две ее боковые грани одинаково наклонены к основанию и составляют с ним угол 60°; е) две ее боковые грани одинаково наклонены к основанию и составляют между собой угол 60°.

28.4. В каком отношении делится объем треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостями: а) KLM, где точки K, L, M — середины боковых ребер; б) AA_1PQ, где точки P и Q — середины ребер BC и B_1C_1; в) XX_1Y_1Y, где XY и X_1Y_1 — средние линии оснований, параллельные BC? Укажите такое сечение этой призмы, которое делит пополам ее объем.

28.5. Какие надо сделать измерения на поверхности реальной наклонной треугольной призмы, чтобы вычислить ее объем?

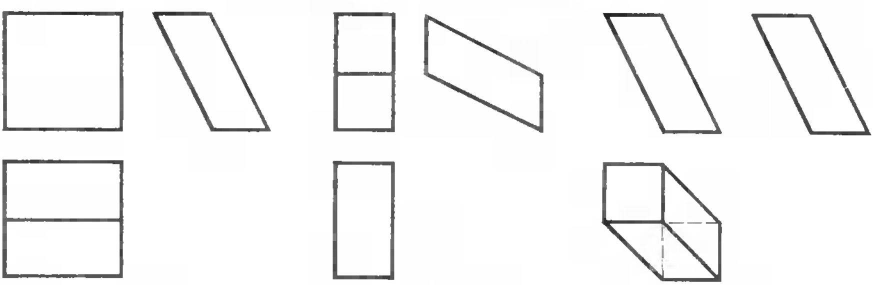
28.6. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ основанием является квадрат со стороной 1, а боковое ребро равно 2. Вычислите его объем, если вершина B_1 проектируется в: а) точку C; б) точку D; в) центр нижнего основания.

28.7. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все грани — ромбы с острым углом 60° и стороной 1. Вычислите его объем, если в вершине A сходятся: а) острые углы трех ромбов; б) острые углы двух ромбов; в) острый угол только одного ромба.

28.8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Нарисуйте его сечение плоскостью, делящей пополам его объем и проходящей через: а) ребро CC_1; б) ребро CD; в) отрезок A_1B; г) диагональ B_1D. Укажите еще какое-нибудь сечение параллелепипеда, делящее пополам его объем.

28.9. Четыре грани параллелепипеда — квадраты. Сторона квадрата равна 1. Вычислите наибольшее значение его объема.

28.10. Для наклонной призмы рассмотрим такие величины: S — площадь основания, S_1 — площадь перпендикулярного сечения, H — высоту и L — боковое ребро. Какая существует между ними зависимость? Как, зная три из них, вычислить четвертую? Объясните, как, исходя из этой зависимости, вычислить высоту в реальной наклонной призме.



а) б) в)

Рис. 285

28.11. Приведите пример двух наклонных призм, имеющих равные объемы, но разные по площади основания и разные высоты.

28.12. Наклонный параллелепипед является частью куба. Какие необходимо сделать замеры на его проекциях, чтобы вычислить его объем (рис. 285)?

Задачи к п. 28.2

Задачи на объем конуса вращения и усеченного конуса вращения

Основная задача

28.13. Как найти объем усеченного конуса, зная радиусы его оснований и высоту?

Решение. Эту задачу можно решить несколькими способами.

1. Объем усеченного конуса V вычислим как разность объемов двух конусов: $V = V_2 - V_1$, где V_2 — объем большего конуса, а V_1 — объем меньшего конуса. Введем следующие обозначения:

R — радиус большего основания усеченного конуса,
r — радиус меньшего основания усеченного конуса,
H — высота усеченного конуса,
h — высота меньшего конуса.

На рисунке 286, *а* показано осевое сечение двух конусов — большего и меньшего, а также осевое сечение усеченного конуса. Согласно принятым обозначениям $O_1A_1 = R$, $O_2A_2 = r$, $O_1O_2 = H$, $PO_2 = h$.

Запишем формулы для объемов:

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 h,\ V_2 = \frac{1}{3}\pi R^2 (H + h).$$

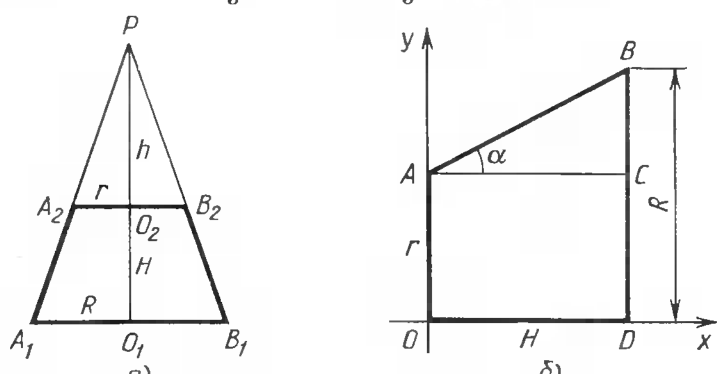


Рис. 286

Тогда $V=\frac{1}{3}\pi(R^2(H+h)-r^2h)$.

В этом равенстве нам известна величина H. Выразим ее через данные величины. Из подобия треугольников PO_1A_1 и PO_2A_2 имеем:

$$\frac{H+h}{h}=\frac{R}{r}, \text{ или } \frac{H}{h}+1=\frac{R}{r},$$

откуда

$$h=H:\left(\frac{R}{r}-1\right)=\frac{Hr}{R-r}.$$

Тогда $V=\frac{1}{3}\pi(R^2H+h(R^2-r^2))=\frac{1}{3}\pi\left(R^2H+\frac{Hr}{R-r}(R^2-r^2)\right)=$
$=\frac{1}{3}\pi(R^2H+Hr(R+r))=\frac{1}{3}\pi H(R^2+Rr+r^2)$.

2. Этот же результат можно получить иначе. Так как меньший и больший конусы подобны, то $\frac{V_1}{V_2}=k^3$, где k — коэффициент подобия.

Тогда $$V=V_2-V_1=V_2-k^3V_2=(1-k^3)V_2.$$

Но $k=\frac{r}{R}$, значит, $V=\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^3\right)V_2$.

Далее, $V_2=\frac{1}{3}\pi R^2(H+h)$, $\frac{h}{H+h}=k$, откуда получаем $h=\frac{rH}{R-r}$, после чего приходим к той же формуле.

3. Наконец, можно вычислить объем усеченного конуса как объем тела вращения, используя интеграл.

Рассмотрим в системе координат трапецию $OABD$, вращением которой вокруг оси x получается усеченный конус (рис. 286,*б*). Тогда OA — радиус его меньшего основания, обозначим его r, DB — радиус его большего основания, обозначим его R, OD — высота конуса, которую обозначим H.

Формула объема через интеграл для тела вращения выглядит так:

$$V=\pi\int_0^H f^2(x)\,dx.$$

Здесь $y=f(x)$ — выражение для функции, график которой вращается вокруг оси x, 0 и H — границы интегрирования.

В нашем случае уравнение отрезка AB запишем в виде

$$y=f(x)=kx+l.$$

Из рисунка видно, что $k=\operatorname{tg}\alpha=\frac{R-r}{H}$, $l=r$.

Тогда

$$y=\frac{R-r}{H}x+r$$

и

$$V=\pi\int_0^H\left(\frac{R-r}{H}x+r\right)^2dx.$$

После соответствующих преобразований придем к той же формуле.

В заключение заметим, что цилиндр и конус можно рассматривать как частные (точнее, предельные) случаи усеченного конуса (в дальнейшем при вычислении площадей их поверхностей так и будем делать). Цилиндр получится, если взять $R=r$; конус получится, если взять $r=0$. Но тогда объем цилиндра и объем конуса можно найти по формуле объема усеченного конуса.

В самом деле для цилиндра получим:

$$V=\frac{\pi H}{3}(R^2+R^2+R^2)=\frac{\pi H}{3}\cdot 3R^2=\pi R^2H,$$

а для конуса получим:

$$V=\frac{1}{3}\pi H(R^2+0+0)=\frac{1}{3}\pi R^2H,$$

что соответствует действительности.

Однако все это рассуждение справедливо только для конуса, а для цилиндра нет. Подумайте почему.

* * *

28.14. Запишите формулу для объема конуса. а) Выразите из нее высоту конуса, радиус его основания. б) Выразите объем конуса через образующую и радиус основания; через образующую и высоту. (В задачах под образующей конуса понимается образующая его поверхности.)

28.15. Вычислите объем конуса, у которого: а) образующая равна 1 и составляет с плоскостью основания угол $30°$; б) образующая равна 2, а высота равна 1; в) образующая равна диаметру основания и равна d.

28.16. Вычислите объем тела вращения, полученного при вращении: а) равностороннего треугольника со стороной 2 вокруг оси симметрии; б) равностороннего треугольника со стороной 1 вокруг прямой, параллельной оси симметрии и проходящей через вершину; в) равнобедренной трапеции с основаниями 4 и 2 и углом при основании $45°$ вокруг оси симметрии; г) такой же трапеции, что и в п. в), но при вращении вокруг боковой стороны; д) ромба со стороной 1 и острым углом $30°$ вокруг диагонали; е) такого же ромба, что и в п. д), но при вращении вокруг прямой, параллельной диагонали и проходящей через вершину.

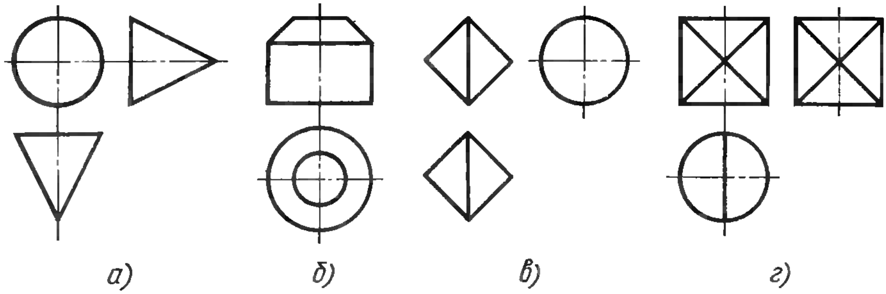


Рис. 287

28.17. Вода в коническом сосуде была налита доверху. а) На сколько понизился ее уровень, когда отлили половину имеющейся воды? б) Какая часть объема осталась, когда уровень воды понизился в два раза?

28.18. Как найти объем усеченного конуса, у которого известны: а) радиусы обоих оснований и образующая; б) радиусы обоих оснований и угол наклона образующей к плоскости основания? Приведите численные примеры.

28.19. Образующая конуса равна 1. В каких границах лежит его объем?

28.20. Из данного конуса с радиусом основания 1 и высотой 1 делают конус наибольшего объема. Вершина этого конуса находится в центре основания данного, оси этих конусов лежат на одной прямой. Каков объем полученного конуса?

28.21. Найдите объем общей части двух конусов, если вершина каждого находится в центре основания другого, осевое сечение каждого представляет собой прямоугольный треугольник с катетом 1.

28.22. Тело задано проекциями. Какие на них надо сделать замеры, чтобы вычислить его объем (рис. 287)?

28.23. Дождь идет равномерно и долго. Можно ли за небольшой промежуток времени узнать, за сколько времени наполнится дождевой водой ведро, имеющее форму усеченного конуса?

Задачи на объем пирамиды

Основные задачи

28.24. Найдите объем правильной треугольной (четырехугольной) пирамиды, у которой известны: а) сторона основания и высота; б) сторона основания и боковое ребро; в) сторона основания и двугранный угол при основании; г) боковое ребро и его угол с основанием.

28.25. Найдите объем правильной треугольной (четырехугольной) усеченной пирамиды, у которой известны: а) стороны оснований и высота; б) стороны оснований и боковое ребро.

* * *

28.26. Дана правильная треугольная пирамида. Рассмотрим такие величины: S — площадь ее основания, S_1 — площадь боковой грани, H — высота, проведенная к основанию, H_1 — высота, проведенная к боковой грани. Какая зависимость есть между этими величинами? Как использовать эту зависимость для нахождения высоты H_1?

28.27. $PABC$ — правильный тетраэдр. Точка K — середина AC, точка L — середина PB, точка M — середина AP, точка N — середина BC. В каком отношении делит его объем сечение, проходящее через: а) PB и точку K; б) AC и точку L; в) CL и точку M; г) LM и точку N; д) KN и LM; е) AB под углом 30° к основанию?

28.28. Вычислите наибольшее значение объема тетраэдра, у которого: а) все ребра, кроме одного, равны 1; б) все ребра, кроме двух, равны 1; в) три ребра равны 2, а еще два равны 3 (здесь возможны разные случаи).

28.29. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 1. В каких границах лежит ее объем?

28.30. Как найти объем реального тетраэдра, делая замеры только на его поверхности?

28.31. Как разделить правильную четырехугольную пирамиду на два равновеликих многогранника?

28.32. Вычислите объем четырехугольной пирамиды, основанием которой является квадрат со стороной 1 и у которой: а) боковые ребра равны 2; б) одна боковая грань перпендикулярна основанию и является равносторонним треугольником; в) две боковые грани перпендикулярны основанию, а наибольшее боковое ребро равно 2; г) двугранный угол при одном боковом ребре прямой, а у противоположного бокового ребра равен 120°.

28.33. Какие замеры надо сделать на поверхности четырехугольной пирамиды для вычисления ее объема, если ее основанием является: а) прямоугольник; б) ромб; в) параллелограмм?

28.34. Все ребра четырехугольной пирамиды $PABCD$ равны 1, PQ — ее высота. В каком отношении делит ее объем сечение, проходящее через: а) высоту PQ; б) точку K — середину высоты перпендикулярно PQ; в) BD параллельно PA; г) AC перпендикулярно PD; д) Q параллельно боковой грани; е) AD перпендикулярно противоположной боковой грани; ж) Q перпендикулярно боковому ребру?

28.35. Как вычислить объем правильной четырехугольной усеченной пирамиды, если известны: а) стороны двух основа-

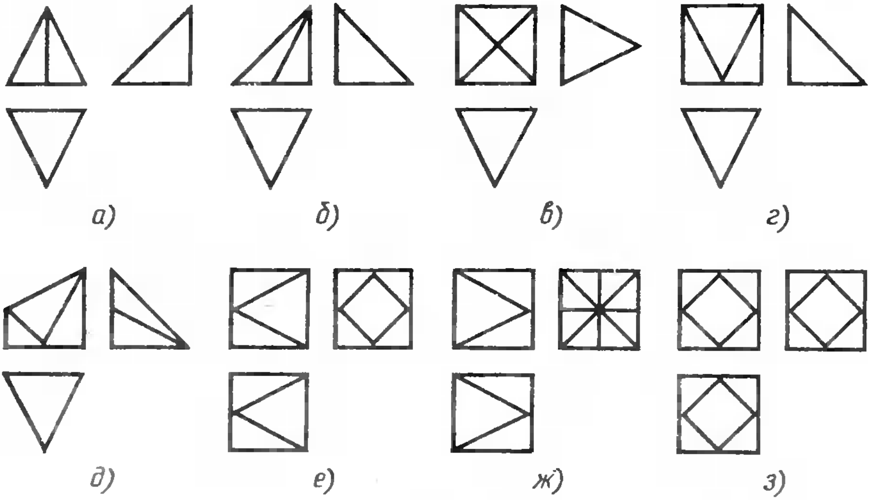


Рис. 288

ний и угол бокового ребра с большим основанием; б) стороны двух оснований и угол между боковой гранью и большим основанием? Приведите численные примеры.

28.36. Вычислите наибольшее значение объема: а) правильной четырехугольной пирамиды, у которой боковое ребро равно 1; б) четырехугольной пирамиды, у которой основанием является прямоугольник, одна сторона которого в два раза больше другой стороны, а боковое ребро равно 1.

28.37. Какие измерения надо сделать на поверхности реальной четырехугольной пирамиды, чтобы вычислить ее объем?

28.38. Многогранник задан своими проекциями (рис. 288). Какие надо сделать измерения на этих проекциях, чтобы вычислить его объем?

Задачи к п. 28.3

28.39. Все золото, добытое в мире, составляет 90 000 т. Чтобы представить себе, сколько это, предположим, что из всего этого золота делают шар. Чему будет равен его радиус?

28.40. Запишите формулу объема шара. а) Выразите его радиус как функцию от объема. б) Пусть радиус шара увеличили в два раза. Что произошло с его объемом? в) Пусть объем шара уменьшился в три раза. Как изменился его радиус?

28.41. Из тысячи металлических шариков радиусом 1 сделали один шар. Каков его радиус?

28.42. Что бы вы предпочли: съесть арбуз радиусом 15 см вчетвером или съесть арбуз радиусом 20 см ввосьмером?

28.43. Какая часть объема шара радиусом R содержится между двумя концентрическими сферами (сферами с одним центром) радиусами R и $0{,}9R$? Каким надо взять радиус меньшей сферы, чтобы между ними заключалась $\frac{1}{4}$ объема шара? $\frac{1}{2}$ объема шара?

28.44. Вычислите объем наибольшего шара, расположенного в: а) кубе с ребром 1; б) прямоугольном параллелепипеде с ребрами 1, 2, 3; в) правильном тетраэдре с ребром 1; г) правильной треугольной призме с ребром 1; д) правильной четырехугольной пирамиде с ребром 1; е) конусе, осевое сечение которого — прямоугольный равнобедренный треугольник с гипотенузой 1; ж) цилиндре, осевое сечение которого — квадрат со стороной 1.

28.45. Как вычислить радиус металлического шарика, используя линейку и прозрачный цилиндрический сосуд с водой?

28.46. В ящике, имеющем вид прямоугольного параллелепипеда, находятся металлические шарики. Ящик заполнен доверху, его размеры во много раз больше размеров шариков. Предложите способ для приближенного подсчета числа шариков.

28.47. Известно, что спелый арбуз не тонет в воде. Какие вам понадобятся данные, если вы хотите выбрать хороший арбуз, не разрезая его и имея в руках одну только линейку или другое приспособление для измерения расстояний?

§ 29. ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ

29.1. О понятии площади поверхности

Площадь поверхности многогранника, естественно, считается равной сумме площадей его граней. Вопрос состоит в определении площади искривленной поверхности, например сферы или некоторых ее частей, боковых поверхностей цилиндра и конуса.

Под **поверхностью** мы понимаем границу тела или ее часть — область на границе тела. Соответственно этому определению многогранная поверхность — это граница многогранника или ее часть, состоящая из многоугольников.

Площадь поверхности определяют так. Разбивают поверхность на такие участки, которые достаточно мало отличаются от плоских, и находят площади этих участков, как если бы они были плоскими. Например, можно заменить эти части поверхности их проекциями на некоторые плоскости, от которых поверхность мало отклоняется. Сумма площадей этих проекций и даст приближенно площадь поверхности.

Так поступают на практике: площадь поверхности купола получается как сумма площадей покрывающих его кусков листового металла (рис. 289). Еще лучше это видно на примере земной поверхности, которую можно приближенно считать сферической. Но участки, небольшие в сравнении с размерами всей Земли, измеряют как плоские.

В математической теории, в геометрии, при определении площади поверхности добавляют условие, что куски поверхности безгранично измельчаются, и берется предел сумм площадей их проекций (на плоскости).

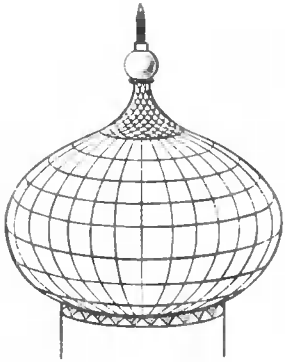


Рис. 289

29.2. Описанные многогранники и определение площади выпуклой поверхности

Кроме многогранных, будем рассматривать еще выпуклые поверхности. Выпуклая поверхность — это поверхность выпуклого тела или ее часть. Выпуклым называется тело, через каждую точку поверхности которого проходит опорная плоскость (рис. 290).

Для выпуклых поверхностей можно применить другой способ определения их площади. Он состоит в том, что вокруг выпуклой поверхности описывают близкую к ней многогранную поверхность. Ее грани будут приближенно представлять куски выпуклой поверхности, а ее площадь даст приближенно площадь само́й искривленной выпуклой поверхности. При этом **многогранная поверхность называется описанной вокруг выпуклой поверхности,** если ее грани лежат в опорных плоскостях данной выпуклой поверхности и она располагается по ту же сторону от каждой такой плоскости, что и данная поверхность. Аналогично многогранник называется **описанным вокруг выпуклого тела,** которое ограничено данной выпуклой поверхностью.

Теперь можно дать следующее определение:

Определение. **Площадью выпуклой поверхности называется предел площадей описанных вокруг нее многогранных поверхностей при условии, что все точки этих многогранных поверхностей становятся сколь угодно близкими к данной выпуклой поверхности.**

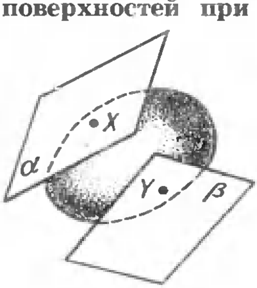


Рис. 290

В следующих пунктах вычисляются площади простейших выпуклых поверхностей. Вычисление площади сферы основано на следующем предложении:

Лемма *(об объеме описанного многогранника).* ***Объем $V(P)$ многогранника P, описанного вокруг шара радиусом R, и площадь $S(P)$ его поверхности связаны соот-***

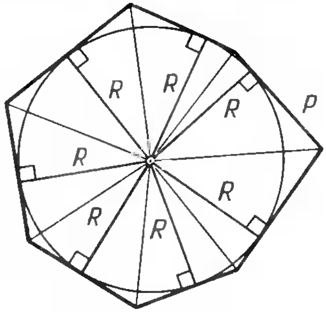


Рис. 291

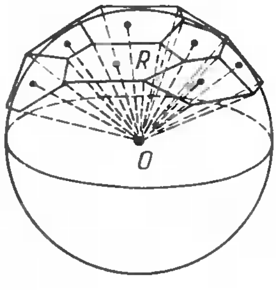


Рис. 292

ношением

$$V(P)=\frac{1}{3}S(P)R. \qquad (1)$$

Замечание. Аналогичным соотношением связаны площадь $S(P)$ многоугольника P, описанного вокруг круга радиусом R, и его периметр $L(P)$ (рис. 291):

$$S(P)=\frac{1}{2}L(P)R. \qquad (2)$$

Доказательство. Опишем вокруг сферы какой-либо многогранник P. Пусть у него n граней $Q_1, \ldots, Q_n$. Разобъем его на пирамиды $T_1, \ldots, T_n$ с общей вершиной в центре O и с гранями $Q_1, \ldots, Q_n$ многогранника P в основаниях (рис. 292).

Каждая такая грань Q_i лежит в опорной плоскости сферы и, значит, перпендикулярна радиусу сферы в точке касания. Значит, этот радиус есть высота пирамиды T_i. Поэтому ее объем будет:

$$V(T_i)=\frac{1}{3}S(Q_i)R,$$

где $S(Q_i)$ — площадь грани Q_i. Сумма этих площадей дает площадь поверхности многогранника $S(P)$, а сумма объемов пирамид T_i — его объем $V(P)$. Поэтому $V(P)=\frac{1}{3}S(P)R$.

29.3. Площадь сферы

Теорема. ***Площадь сферы радиусом R выражается формулой***

$$S=4\pi R^2. \qquad (3)$$

Доказательство. Пусть дан шар U радиусом R. Возьмем на его сфере n точек, не лежащих в одной полусфере, и проведем через них опорные плоскости к шару. Эти плоскости ограничат многогранник P_n, описанный вокруг шара U. Будем увеличивать число выбранных точек и брать их все гуще.

Например, возьмем достаточно густую сеть параллелей и меридианов и выберем точки их пересечения. Тогда поверхности многогранников P_n будут приближаться к данной сфере. Объемы $V(P_n)$ этих многогранников будут стремиться к объему шара U, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} V(P_n)=\frac{4}{3}\pi R^3. \tag{4}$$

Согласно определению площади выпуклой поверхности их площади $S(P_n)$ стремятся к площади S данной сферы, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} S(P_n)=S. \tag{5}$$

Но по лемме п. 29.2

$$V(P_n)=\frac{1}{3}S(P_n)R. \tag{6}$$

Переходя в (6) к пределу и используя (4) и (5), получаем:

$$\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{1}{3}SR,$$

откуда следует, что $S=4\pi R^2$. Теорема доказана.

29.4. Площадь поверхности конуса и цилиндра

Теорема *(о площади боковой поверхности цилиндра). **Площадь боковой поверхности цилиндра вращения с высотой H и радиусом основания R выражается формулой***

$$S=2\pi RH. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть дан цилиндр вращения C с высотой H и радиусом основания R (рис. 293). Опишем вокруг C правильную n-угольную призму P_n. Ее высота тоже равна H, а основаниями будут правильные n-угольники, описанные вокруг оснований цилиндра C.

Очевидно, что площадь S_n боковой поверхности призмы P_n выражается равенством

$$S_n=L_nH, \tag{8}$$

где L_n — периметр основания призмы P_n. Перейдем в равенстве (8) к пределу при $n\to\infty$. Периметры L_n сходятся к длине окружности основания цилиндра C, т. е. к $2\pi R$. А площади S_n сходятся к S. Поэтому $S=2\pi RH$, что и требовалось доказать.

Теорема *(о площади поверхности конуса). **Площадь боковой поверхности конуса вращения с образующей L и радиусом основания R выражается формулой***

$$S=\pi RL. \tag{9}$$

Доказательство. Пусть дан конус вращения K с образующей L и радиусом основания R (рис. 294). Опишем вокруг K правильную n-угольную пирамиду P_n. Высоты ее боко-

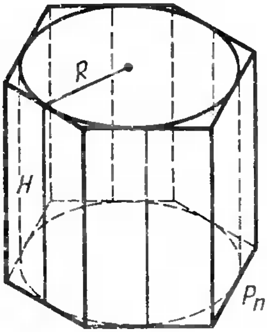


Рис. 293

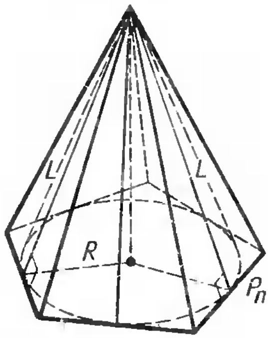


Рис. 294

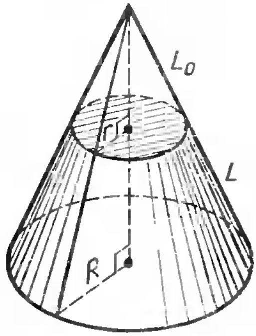


Рис. 295

вых граней будут равны L (по теореме о трех перпендикулярах), а основанием будет правильный n-угольник, описанный вокруг основания конуса K. Поэтому площадь боковой поверхности S_n пирамиды P_n выражается формулой

$$S_n = \frac{1}{2} L_n L, \tag{10}$$

где L_n — периметр основания пирамиды P_n.

Перейдем к пределу в (10) при $n \to \infty$. Периметры L_n сходятся к длине окружности основания конуса K, т. е. к $2\pi R$. А площади S_n сходятся к S. Поэтому $S = \pi RL$, что и требовалось доказать.

Следствие. ***Площадь боковой поверхности усеченного конуса вращения с радиусами оснований R и r и длиной образующей L выражается формулой***

$$S = \pi (R + r) L. \tag{11}$$

Действительно, площадь боковой поверхности усеченного конуса вращения получается как разность площадей боковых поверхностей конусов вращения с образующими $L + L_0$ и L_0 и радиусами оснований R и r (рис. 295). Поэтому

$$S = \pi R (L + L_0) - \pi r L_0 = \pi RL + \pi L_0 (R - r).$$

Но из подобия прямоугольных треугольников имеем:

$$\frac{L_0}{r} = \frac{L}{R - r}.$$

Следовательно, $L_0 (R - r) = rL$, т. е.

$$S = \pi (R + r) L,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Формулы (7) и (9) являются частными случаями формулы (11): при $r = R$ получаем формулу (7), а при $r = 0$ получаем формулу (9).

Задачи к § 29

Задачи к п. 29.1

Основные задачи

29.1. Докажите, что площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания и высоты.

29.2. Докажите, что площадь боковой поверхности любой призмы равна произведению периметра ее перпендикулярного сечения и бокового ребра.

29.3. Докажите, что площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна произведению полупериметра основания и апофемы.

29.4. а) Как можно вычислить площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды? б) Запишите формулу зависимости этой площади от периметров ее оснований и апофемы. в) Как из этой формулы получить величину площади боковой поверхности правильной пирамиды? правильной призмы?

* * *

29.5. Куб с ребром 1 разрезали на 1000 кубиков, равных между собой. Во сколько раз общая площадь поверхности полученных кубиков больше площади поверхности данного куба? На сколько кубиков надо разрезать данный куб, чтобы общая площадь поверхности кубиков была в 10^9 раз больше, чем поверхность данного куба? Какой вывод можно сделать на основании результатов решения этой задачи?

29.6. а) Площадь поверхности одного куба больше площади поверхности другого. Докажите, что объем первого куба тоже больше. б) Сформулируйте и докажите утверждение, обратное а). в) Установите зависимость между площадью поверхности куба и его объемом, получив какую-либо формулу. г) Верны ли результаты задач а) и б) для прямоугольного параллелепипеда?

29.7. Возьмите два равных прямоугольных параллелепипеда. Как составить из них многогранник с наибольшей (наименьшей) площадью поверхности? (При составлении многогранника параллелепипеды прикладываются гранями или их частями.)

29.8. В каких границах лежит объем прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием, если: а) площадь его поверхности равна 1; б) площадь его поверхности без одного из оснований равна S?

29.9. Как провести сечение прямоугольного параллелепипеда, которое разделит площадь его поверхности пополам?

29.10. Все ребра параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равные ромбы со стороной 1. Чему равна площадь его поверхности, если: а) острый угол в каждой грани равен $60°$; б) точка C_1 проектируется в точку пересечения диагоналей основания; в) точка D_1 проектируется в ту же точку?

29.11. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $|AA_1|=1$, $|AB|=2$, $|AD|=3$, грань AA_1D_1D перпендикулярна основанию, а грань AA_1B_1B составляет с ним угол $45°$. $\angle BAC=45°$. Вычислите площадь его поверхности.

29.12. Все грани параллелепипеда — ромбы. В каком случае площадь поверхности такого параллелепипеда достигает наибольшего значения?

29.13. Параллелепипед является ромбоидом. (Ромбоидом называется параллелепипед, грани которого — равные ромбы и в одной из вершин сходятся острые углы этих ромбов.) Каким сечением площадь его поверхности делится пополам?

29.14. Каким сечением можно разделить пополам площадь поверхности: а) параллелепипеда; б) правильной треугольной призмы? Делится ли этим же сечением пополам их объем?

29.15. Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма. $|AA_1|=2$, $|AB|=1$. Через AC проводится сечение под углом $30°$ к основанию. Вычислите площади поверхностей образовавшихся частей призмы. Сделайте то же для углов $45°$, $60°$.

29.16. Объем правильной треугольной призмы равен 1. В каких границах лежит площадь ее поверхности?

29.17. Деревянный брус имел вид прямой треугольной призмы. Сделали два параллельных его распила, и получилась наклонная треугольная призма. Как найти площадь ее поверхности, сделав как можно меньше измерений?

29.18. В призме $ABCA_1B_1C_1$ основание ABC — правильный треугольник со стороной 2, а боковое ребро равно 1. Вычислите площадь ее поверхности, если: а) грань AA_1C_1C — прямоугольник, плоскость которого составляет с основанием угол $60°$; б) вершина B_1 проектируется в центр треугольника ABC; в) вершина B_1 проектируется в середину стороны AC.

29.19. Вычислите площадь поверхности правильной треугольной (четырехугольной) пирамиды, у которой: а) сторона основания равна 2, а высота равна 1; б) боковое ребро равно 3, а высота равна 2; в) боковое ребро равно 1, а угол бокового ребра с основанием равен $60°$; г) ребро основания равно 2, угол боковой грани с основанием равен $45°$.

29.20. Каким сечением можно разделить пополам площадь поверхности: а) правильного тетраэдра; б) правильной треугольной пирамиды; в) правильной четырехугольной пирамиды?

29.21. а) Объем одного правильного тетраэдра больше объема другого правильного тетраэдра. Сравните их площади поверхности. б) Решите задачу, обратную а). в) Пусть объем правильного тетраэдра увеличился в два раза. Во сколько раз увеличилась площадь его поверхности? г) Составьте обратную задачу. д) Какой вывод можно сделать, решив задачи а) — г)?

29.22. Объем правильной треугольной пирамиды равен $9\sqrt{2}$. В каких границах лежит площадь его боковой поверхности? Затем решите задачу в общем виде. Составьте обратную задачу.

29.23. Как с наименьшим числом измерений вычислить поверхность тетраэдра $PABC$, у которого: а) $PA=BC$, $PB=AC$, $PC=AB$; б) $PA=PC=BC$, $PB=AB=AC$; в) $PA=PC=AB=BC$, $PB=AC$; г) $PA=PB=PC=AC$?

29.24. Какие измерения надо сделать на поверхности тетраэдра $PABC$, чтобы вычислить площадь его поверхности, если: а) $\angle PBC=\angle PBA=\angle ABC=90°$; б) $\angle APB=\angle BPC=\angle CPA$; в) $AB=BC$, $PB\perp(ABC)$; г) $PA=PB$, $(PAB)\perp(ABC)$?

29.25. Какие измерения надо сделать на поверхности четырехугольной пирамиды для вычисления площади ее поверхности, если известно, что: а) $ABCD$ — квадрат, $PA=PB$; б) $ABCD$ — ромб, $PA=PC$; в) $ABCD$ — прямоугольник и все боковые ребра равны; г) $ABCD$ — квадрат и P проектируется в C; д) $ABCD$ — прямоугольник и P проектируется в середину CD; е) $ABCD$ — трапеция, а грани PAB и PCD перпендикулярны основанию?

29.26. Как вычислить площадь боковой поверхности правильной треугольной (четырехугольной) усеченной пирамиды, у которой известны стороны оснований и: а) боковое ребро; б) угол бокового ребра с основанием; в) угол между боковой гранью и основанием; г) высота; д) угол между противоположными боковыми гранями? Приведите численные примеры.

29.27. Какие измерения надо сделать на проекциях многогранника (рис. 288), чтобы вычислить площадь его поверхности?

Задачи к п. 29.2

Основные задачи

29.28. Докажите, что можно вписать сферу: а) в куб; б) в правильную пирамиду.

29.29. Докажите, что около сферы можно описать: а) куб; б) правильную пирамиду.

* * *

29.30. Можно ли описать около сферы: а) прямую треугольную призму; б) наклонный параллелепипед; в) правильную усеченную пирамиду? Какие для этого должны выполняться условия?

29.31. Вычислите радиус сферы, вписанной в: а) куб с ребром 2; б) правильный тетраэдр с ребром 2; в) правильную четырехугольную пирамиду с ребром основания 2 и боковым ребром 3.

Задачи к п. 29.3

29.32. Запишите формулу для вычисления площади сферы. Выразите из нее радиус сферы.

29.33. а) Выразите объем шара через площадь его поверхности. б) Запишите обратную зависимость. в) Пусть объем шара начал расти. Как изменяется при этом площадь его поверхности? Решите обратную задачу. г) Пусть площадь поверхности шара увеличилась в два раза. Как изменился его объем? д) Пусть объем шара уменьшился в три раза. Как изменилась площадь его поверхности? е) Может ли объем шара численно равняться площади его поверхности?

29.34. Перед вами два окрашенных шара. Радиус одного в два раза больше радиуса другого. Во сколько раз больше ушло на него краски?

29.35. Из шара площадью поверхности 1 см^2 сделали какое-то число одинаковых шариков. Может ли суммарная площадь их поверхностей быть больше, чем 1 м^2?

29.36. Шар разделили плоскостью на две равновеликие части. Как разделилась площадь его поверхности? Решите обратную задачу.

29.37. Пусть радиус шара равен 1. Чему равна площадь поверхности части шара, которая получилась после проведения в нем: а) сечения, проходящего через диаметр; б) двух перпендикулярных сечений, проходящих через один диаметр; в) трех попарно перпендикулярных сечений, проходящих через его центр?

29.38. Пусть радиус сферы увеличивается. а) Докажите, что скорость изменения площади поверхности сферы пропорциональна радиусу. б) Докажите, что скорость изменения объема шара равна площади поверхности.

Задачи к п. 29.4

29.39. Вычислите площадь поверхности цилиндра, у которого: а) осевым сечением является квадрат со стороной 2; б) разверткой боковой поверхности является прямоугольник со сторонами 3 и 2.

29.40. Запишите формулу площади поверхности цилиндра. Выразите из нее R, L.

29.41. а) Пусть известна площадь боковой поверхности цилиндра. Можно ли найти площадь поверхности цилиндра? его объем? Если нет, то можно ли узнать, в каких границах они меняются? б) Пусть известна площадь поверхности цилиндра. Можно ли найти его объем? Если нет, то в каких

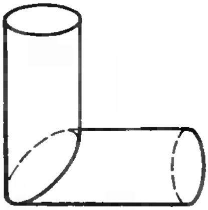


Рис. 296

границах он лежит? в) Пусть известен объем цилиндра. Можно ли найти площадь его боковой поверхности? его поверхности? Если нет, то можно ли узнать, в каких границах они лежат? Приведите численные примеры.

29.42. Пусть радиус основания цилиндра начал расти, а образующая постоянна. Докажите, что: а) скорость, с которой растет площадь его боковой поверхности, постоянна; б) скорость, с которой растет его объем, пропорциональна площади боковой поверхности; в) скорость, с которой растет площадь его поверхности, линейно зависит от радиуса.

29.43. Каким сечением можно разделить пополам площадь поверхности цилиндра? Могут ли при этом получиться такие части цилиндра, объемы которых различны?

29.44. На рисунке 296 изображено тело, которое составлено из двух равных цилиндров. Как найти площадь поверхности и объем такого тела?

29.45. Известно, что два цилиндра равновелики (т. е. имеют равные объемы), но не равны. Можно ли сравнить их площади боковых поверхностей, измерив только радиусы? А площади поверхностей?

Задачи на площадь поверхности конуса

29.46. Вычислите площадь поверхности конуса, у которого: а) осевое сечение — равносторонний треугольник со стороной 2; б) разверткой боковой поверхности является четверть круга радиусом 1; в) разверткой боковой поверхности является полукруг радиусом R; г) образующая поверхности равна L и образует с основанием угол φ.

29.47. Запишите формулу площади боковой поверхности конуса. Выразите из нее R, L.

29.48. а) Пусть известна площадь боковой поверхности конуса. Можно ли найти площадь его поверхности? его объем? Если нет, то можно ли узнать, в каких границах они меняются? б) Пусть известна площадь поверхности конуса. Можно ли найти площадь его боковой поверхности? его объем? Если нет, то можно ли узнать, в каких границах они меняются? в) Пусть известен объем конуса. Можно ли найти его площадь боковой поверхности? площадь его поверхности? Если нет, то можно ли узнать, в каких границах они меняются?

29.49. Составьте для конуса задачу, аналогичную задаче 29.42. Получите ли вы аналогичные результаты?

29.50. Каким сечением можно разделить площадь поверхности конуса пополам? Могут ли при этом получиться части конуса, объемы которых различны?

29.51. Сравните между собой площадь боковой поверхности конуса и площадь его основания. Каким может быть их отношение?

29.52. Образующая поверхности конуса равна 1. В каких границах лежит его площадь: а) боковой поверхности; б) поверхности?

29.53. В шар радиусом 2 вписан конус, у которого плоскость основания удалена от центра шара на 1. Вычислите площадь его поверхности.

29.54. Настольная лампа имеет абажур в виде боковой поверхности усеченного конуса. Как узнать, сколько материала пошло на его изготовление?

29.55. Два конуса расположены так, что вершина каждого находится в центре основания другого. Как вычислить площадь поверхности тела, являющегося их: а) пересечением; б) объединением? Приведите численные примеры.

29.56. Оси двух конусов лежат на одной прямой, их основания находятся в одной плоскости, а сами они — с одной стороны от этой плоскости. Радиус первого равен 2, а его высота равна 1. Радиус второго равен 1, а его высота равна 2. Вычислите площадь поверхности их объединения.

29.57. Как вычислить площадь поверхности тела вращения, полученного в результате вращения: а) равностороннего треугольника вокруг высоты; б) равностороннего треугольника вокруг стороны; в) равностороннего треугольника вокруг прямой, проходящей через вершину и параллельной его высоте; г) равностороннего треугольника вокруг прямой, параллельной его стороне; д) квадрата вокруг его диагонали; е) квадрата вокруг прямой, проходящей через вершину и параллельной диагонали; ж) прямоугольника вокруг диагонали; з) ромба вокруг диагонали; и) ромба вокруг стороны; к) прямоугольной трапеции вокруг боковой стороны; л) прямоугольной трапеции вокруг основания; м) равнобедренной трапеции вокруг оси симметрии; н) равнобедренной трапеции вокруг основания; о) равнобедренной трапеции вокруг боковой стороны? Выберите сами числовые данные и получите результат.

▲ § 30. РАЗВИТИЕ ГЕОМЕТРИИ ОТ НАЧАЛА ДО ЛОБАЧЕВСКОГО

30.1. Эпоха практической геометрии

Первоначальные геометрические понятия зародились у людей в глубочайшей древности и постепенно расширялись и уточнялись с развитием практической деятельности, когда люди оценивали расстояния, делали прямые копья и стрелы, сравнивали их по длине и т. д. Но сама геометрия зародилась тогда, когда с развитием земледелия были выработаны и осознаны первые правила измерения земельных участков для посева, правила нахождения объема сосудов, строительства зданий и др. Эти простые правила сравнения фигур, нахождения геометрических величин, простейших геометрических построений и составили начало геометрии как пока еще чисто прикладной науки, как собрания правил решения практических задач.

Такие зачатки геометрии складывались в древних земледельческих обществах (в Египте, Вавилоне, дельте Инда, Китае). И раньше всего, по-видимому, в Древнем Египте. Самое древнее дошедшее до нас в отрывках собрание правил решения геометрических задач из Египта относится к XVII в. до н. э., и оно, конечно, не было первым. Так что возраст геометрии надо оценивать не менее чем в 4—5 тысяч лет. Но тогда она не была еще математической наукой. Египтяне знали многие факты геометрии, например теорему Пифагора, приближенное выражение объема шара через его радиус и др., именно как опытные факты, а не логически доказанные теоремы. Математика, как мы ее теперь понимаем, сложилась много позже.

30.2. Формирование теоретической геометрии

Практические правила, подсказанные опытом, постепенно приводились в систему, и одни правила стали выводиться из других. Возникло доказательство, правила стали превращаться в теоремы, в предложения, которые доказываются рассуждением без ссылок на опыт; появились также задачи и выводы, имеющие умозрительный, теоретический интерес; оформились представления об идеальных геометрических фигурах — о точках без всяких измерений, о прямых без ширины и толщины и т. п. Геометрия постепенно становилась, таким образом, теоретической наукой, как мы ее теперь понимаем. Одновременно стала складываться теоретическая арифметика — начала теории чисел, так что в целом возникла чистая математика. Как происходил этот процесс, точно неизвестно, но, во всяком случае, известно, что геометрия оформилась как наука в Древней Греции в VII—V в. до н. э. В этом сыграли существенную роль греческие мыслители, известные вам по названиям теорем,— Фалес (ок. 625 — ок. 547 гг. до н. э.) и Пифагор (VI в. до н. э.). Несколько позже другой греческий философ и ученый — Демокрит (ок. 460 — ок. 370 гг. до н. э.) создал прообраз интегрального исчисления, находя объемы суммированием тонких слоев. Ему же, по-видимому, принадлежит вывод связи между объемом и площадью поверхности шара в теореме: $V=\frac{1}{3}SR$. Он представил шар как состоящий из очень тонких пирамид с общей вершиной в центре. Высота такой пирамиды равна радиусу R, так что ее объем $V=\frac{1}{3}RS$, где S — площадь основания. Сложив, получим для объема всего шара

$$V=\frac{1}{3}RS.$$

В конце V в. до н. э. греческий геометр Гиппократ Хиосский (т. е. из Хиоса) создал сводное сочинение по геометрии — «Начала», до нас, однако, не дошедшее. Он, как и другие греческие геометры того времени, занимался тонкими теоретическими вопросами геометрии.

Таким образом, в то время геометрия, несомненно, уже сложилась как наука с ее системой выводов и с чисто теоретическими задачами.

Этот процесс формирования геометрии от правил измерения земельных участков до логической системы теорем кратко охарактеризован в следующих замечательных словах греческого ученого Евдема Родосского (IV в. до н. э.):

«Геометрия была открыта египтянами и возникла при измерении Земли. Это измерение было им необходимо вследствие разливов реки Нила, постоянно смывающего границы. Нет ничего удивительного в том, что эта наука, как и другие, возникла из потребностей человека. Всякое возникающее знание из несовершенного состояния переходит в совершенное. Зарождаясь путем чувственного восприятия, оно постепенно становится предметом рассмотрения и, наконец, делается достоянием разума».

30.3. Расцвет геометрии в Греции

Одним из важнейших событий того времени — в V в. до н. э. — было открытие несоизмеримых отрезков. Диагональ квадрата несоизмерима с его стороной: у них нет общей меры, т. е. нет такого отрезка, как бы мал он ни был, который укладывался бы и в стороне и в диагонали по целому числу раз. Говоря нашим современным языком, если сторона квадрата равна a, то диагональ по теореме Пифагора равна $\sqrt{2}a$. $\sqrt{2}$ — число иррациональное, поэтому нет такой величины и таких целых чисел m и n, чтобы $a=mb$ и $\sqrt{2}a=nb$.

Раньше думали, что отношение любых величин можно выразить рациональным числом, т. е. как отношение целых чисел, и вот выяснилось, что это неверно. Выяснилось тем самым, что рациональных чисел недостаточно для выражения отношения любых величин. Но обобщения понятия числа до иррациональных чисел греки, однако, не смогли сделать. Поэтому то, что мы теперь выражаем средствами алгебры, они выражали геометрически: сначала была геометрия — алгебра появилась потом. Например, квадратное уравнение $x^2+ax=b$ выражалось примерно так: найти такой отрезок x, что квадрат, на нем построенный, вместе с прямоугольником, построенным на этом отрезке и данном отрезке, дают площадь, равную данной.

Вместо действительных чисел вообще рассматривались отношения величин. Теорию этих отношений построил в IV в. до н. э. Евдокс, один из величайших древнегреческих ученых. И в настоящее время его теория является образцом строго логического построения. Кроме того, он положил начало методу нахождения объемов, более строгому, чем метод Демокрита, так называемому «методу исчерпывания», который потом особенно успешно применял Архимед. Евдокс создал также первую модель движения небесных тел (с Землей в центре), можно сказать, первую математическую теорию естествознания: она послужила прообразом более поздней системы Птолемея. Основные достижения геометрии были систематизированы и изложены в логической последовательности Евклидом в его обширном труде, известном под названием «Начала». Евклид жил в Александрии в III в. до н. э., уже в другую эпоху греческой истории, последовавшую за походами Александра Македонского,— эпоху эллинизма. Рассказывают, что, когда правивший в Александрии царь сказал Евклиду, чтобы тот специально для него изложил геометрию, Евклид отвечал: «В геометрии нет царского пути». Истина, наука для всех одна.

«Начала» Евклида содержат только основы геометрии того времени, но, например, известные тогда результаты о конических сечениях в них не излагаются. Кроме того, «Начала» содержат элементы теории чисел и геометрически изложенной алгебры, так что в целом они представляют собой изложение основ математики того времени. Открываются «Начала» определениями основных понятий и формулировками основных положений геометрии — «постулатов» и «аксиом», затем следуют в широкой последовательности «предложения» — теоремы и решения задач на построение; каждый новый раздел «Начал» начинается тоже с нужных определений. Причины разделения основных положений на «постулаты» и «аксиомы» в настоящее время не вполне понятны, и им не придают значения; теперь основные положения всякой теории называют вообще аксиомами.

Эта структура «Начал» послужила образцом научного изложения на две тысячи лет, и ему, например, следовал Ньютон в своих «Математических началах натуральной философии». Учебники же школьной геометрии до самого последнего времени повсеместно представляли, по существу, популярные изложения «Начал» Евклида.

Со времени Евклида все учили геометрию по его «Началам», а предшествовавшие им сочинения (например, упомянутые выше «Начала» Гиппократа Хиосского) были забыты.

После Евклида греческие ученые развивали способы нахождения площадей и объемов (Архимед — ок. 287—212 гг.

до н. э.), глубоко изучали конические сечения (Аполлоний — ок. 260 — ок. 170 гг. до н. э.), положили начало тригонометрии (Гиппарх — ок. 180— ок. 125 гг. до н. э.), тригонометрии на сфере (Менелай — I—II вв.) и др.

30.4. От греков к Декарту

Дальнейшее развитие геометрии, однако, затормозилось и почти вовсе остановилось, так как требовало новых идей и методов. Необходимо было развитие понятия числа, развитие алгебры. Оно и началось в Греции в работах Диофанта (ок. III в.) и далее в Индии, откуда мир получил, не считая других, три великих достижения: позиционную десятичную систему счисления, понятие об отрицательных числах, понятие об иррациональных числах с зачатками алгебры. Дальше развитие алгебры шло особенно быстро в Средней Азии. Собственно, ее основателем можно считать Мухаммеда аль-Хорезми (из Хорезма, 787 — ок. 850). От названия его сочинения произошло само слово «алгебра» (переделанное арабское слово «аль-джебр» — название алгебраической операции перенесения членов уравнения из одной части в другую), а от его прозвища (фамилии) аль-Хорезми образовалось слово «алгоритм», или «алгорифм».

Позже персидский и таджикский поэт и ученый Омар Хайям (ок. 1048 — ок. 1123) дал общее определение числа как отношения любых величин вообще. Это же определение было дано Ньютоном во «Всеобщей арифметике» спустя 600 лет после Хайяма.

Западная Европа стала превосходить в развитии математики Среднюю Азию и арабские страны только в XVI в., когда были найдены решения уравнений 3-й и 4-й степени и открыты комплексные числа. В геометрии же принципиально новые шаги были сделаны в XVII в. прежде всего в связи с развитием алгебры, а потом с созданием математического анализа.

Знаменитый французский философ и математик Рене Декарт (1596—1650) в известном смысле завершил развитие элементарной алгебры, введя в нее обозначения, принятые и поныне (аль-Хорезми, например, выражал словами то, что теперь пишут формулами). В 1637 г. Декарт опубликовал основное свое сочинение «Геометрия», в котором ввел координаты на плоскости, и, связав таким путем геометрию с алгеброй, включил в предмет геометрии любые кривые, представимые алгебраическими уравнениями.

Рене Декарт

30.5. Анализ и геометрия

Развитие науки в Европе, начавшееся с середины XVI в. системой Коперника, пошло в XVII в. дотоле невиданными темпами. Совершенно преобразуется одна из старейших наук — астрономия, создается механика как наука о движении (у греков была лишь статика), в физике закладывается учение об электричестве и магнетизме и физическая оптика, возникает физиология, начинает складываться как наука химия и т. д.

Получает совершенно новое развитие также и математика: неограниченно расширяются ее предмет и методы. Возникают четыре ее могущественных метода: координаты, бесконечные ряды, дифференциальное и интегральное исчисление. В предмет математики включаются в принципе любые функции и фигуры, которые могут быть представлены и исследованы посредством этих методов, например любые функции, представимые бесконечными рядами, и любые кривые, представимые в декартовых координатах уравнениями с такими функциями. Исследование функций посредством рядов, дифференциального и интегрального исчисления вместе с разработкой самих этих методов образовало новую область математики, получившую название «математический анализ», «анализ бесконечно малых», или, коротко, «анализ». Создание его основ в XVII в. явилось общим делом многих математиков и было завершено решающим вкладом Исаака Ньютона (1643—1727) и Готфрида Лейбница (1646—1716).

Общее исследование движения требовало соответствующих общих понятий и методов. Путь, пройденный телом, есть вообще функция времени. Скорость — производная от пути по времени. Путь, восстановленный по скорости движения,— это ее интеграл. Ньютон, можно сказать, был вынужден выработать эти математические понятия и открыть связь между ними, чтобы выразить в общей и точной форме законы механики и методы решения ее задач.

Греки тоже изучали движение и функции, но то были конкретные движения небесных светил и конкретные функции, как, скажем, синус угла (или длина хорды, стягивающей углы, таблицы которых они вычислили). Но у них не было ни общей теории движения, ни соответственно исчисления функций. Именно соединение идеи движения с методом алгебры и задачами геометрии (как вычисление объемов) послужило возникновению математического анализа.

Он не только занял в математике центральное положение, но и проник в ее более старые области — в геометрию, в теорию чисел, в алгебру, так что математика стала в подавляющей части анализом и его применениями. Главное же состояло в том, что с момента своего возникновения и тем более в последующем развитии он дал могущественные средства формули-

Леонард Эйлер

Гаспар Монж

ровки законов и решения задач точного естествознания и техники.

Если с небольшим преувеличением можно сказать, что у греков математика была геометрией, то также можно сказать, что после Ньютона математика стала анализом.

В геометрии главным стало обеспеченное методом координат приложение алгебры и анализа; первое дало так называемую аналитическую геометрию, второе — дифференциальную геометрию, т. е. общую теорию кривых и поверхностей, развиваемую методом анализа. Рассматриваемые в школьном курсе элементы метода координат и, скажем, задачи проведения касательной к кривой представляют только самые простые и начальные моменты двух теорий — аналитической и дифференциальной геометрии. Аналитическая геометрия была систематически изложена, включая метод координат в пространстве, к середине XVIII в. Леонардом Эйлером (1707—1783). Векторы были введены позже — к середине XIX в.— ирландским математиком Уильямом Гамильтоном (1805—1865). Дифференциальная геометрия была выделена в особую область геометрии в конце XVIII в. французским математиком Гаспаром Монжем (1746—1818); его сочинение так и называлось — «Приложение анализа бесконечно малых к геометрии».

Однако, несмотря на такое развитие анализа, в геометрии, так же как и в алгебре, оставались области и проблемы, ему неподвластные. Именно эти проблемы привели в XIX в. к созданию новой, неевклидовой геометрии, в которой главную роль сыграл Николай Иванович Лобачевский (1792—1856). Но об этом мы расскажем в главе VII. ▼

Задачи к главе V

1. В шар радиусом 1 вписан цилиндр. Диагональ его осевого сечения образует с плоскостью основания угол φ. а) Найдите для этого цилиндра объем, площадь боковой поверхности поверхности. б) Можете ли вы установить границы, в которых лежат эти величины при изменении φ?

2. В полушар радиусом 1 вписан цилиндр. В каких границах лежат объем, площадь поверхности и боковой поверхности цилиндра, если ось цилиндра: а) лежит на оси полушара; б) перпендикулярна оси полушара?

3. Два конуса имеют общую высоту, причем вершина каждого лежит в центре основания другого. Образующая поверхности одного из них равна 1, угол при вершине осевого сечения этого конуса равен 2α, а угол при вершине осевого сечения другого равен 2β. а) Найдите объем и площадь поверхности их общей части. б) В каких границах лежат эти величины при $\alpha=\beta$?

4. В полушар радиусом 1 вписан конус так, что его вершина находится в центре полушара, а ось конуса находится на оси полушара. В каких границах находятся объем и площадь поверхности конуса?

5. В конус вписан полушар радиусом 1 так, что центр полушара совпадает с центром основания конуса, а ось полушара лежит на оси конуса. В каких границах лежат объем, площадь боковой поверхности и площадь поверхности этого конуса?

6. Дан конус. Его осевое сечение — равнобедренный треугольник с боковой стороной 1 и углом при основании φ. В конус вписан полушар. Чему равны его объем и площадь поверхности, если: а) центр полушара совпадает с центром основания конуса; б) основание полушара параллельно основанию конуса? В каких границах лежат эти величины?

7. Равнобедренный треугольник с основанием 2 и углом φ при основании вращается вокруг: а) основания; б) боковой стороны; в) прямой, проходящей через вершину и параллельной основанию; г) прямой, проходящей через вершину основания и параллельной боковой стороне; д) прямой, параллельной основанию и удаленной от него на 1 (возможны разные случаи). Найдите объем и площадь поверхности полученного тела вращения и установите границы, в которых они лежат.

8. Прямоугольник со сторонами 1 и 2 вращается вокруг: а) диагонали; б) прямой, перпендикулярной диагонали, лежащей в плоскости прямоугольника и проходящей через его вершину. Вычислите объем и площадь поверхности тела вращения.

9. Три стороны трапеции $ABCD$ равны 1, а острый угол при основании AD равен φ. Эта трапеция вращается вокруг: а) AD; б) BC; в) AB; г) средней линии оснований; д) средней линии боковых сторон; е) прямой, параллельной высоте трапеции и проходящей через A. В каких границах лежат объем и площадь поверхности тела вращения?

ГЛАВА VI.

КООРДИНАТЫ. ВЕКТОРЫ. ДВИЖЕНИЯ

Все теоремы, доказанные в предыдущих главах, были известны еще в Древней Греции (хотя часто при их доказательствах мы пользовались современными методами: например, применяли интегральное исчисление в теории объемов).

В этой и следующей главах говорится о таких разделах геометрии, которые были созданы значительно позднее — в XVII—XX вв., и о развитии геометрии с древнейших времен до наших дней.

Координаты, векторы, движения уже рассматривались в планиметрии. В стереометрии мы изучаем их по тому же плану, не доказывая заново то, что уже было доказано в планиметрии.

§ 31. ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ

31.1. Определение прямоугольных координат

Возьмем в пространстве три взаимно перпендикулярные прямые, пересекающиеся в одной точке O (рис. 297). На каждой из этих прямых введем координату с началом O. На одной из этих прямых координату обозначим x, на другой — y, на третьей — z. Эти прямые называют **осями координат** x, y, z: ось x, ось y, ось z. Произвольной точке M пространства сопоставляются три координаты следующим образом. Точка M проектируется на оси, и за ее координаты принимаются координаты ее проекций. Итак, **координата** x **точки** M — это координата ее проекции M_x на ось x. Аналогично определяются координаты y и z. Координаты точки записывают вслед за обозначением точки: $M(x, y, z)$. Нередко точку обозначают просто ее координатами: (x, y, z).

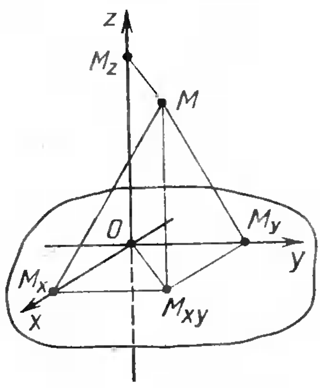


Рис. 297

Определенные таким образом координаты называют прямоугольными или **декартовыми.**

31.2. Другое построение координат точки

Плоскости, проходящие через пары осей, называются **координатными плоскостями.** Плоскость, проходящая через оси x, y, называется плоскостью xy. Аналогично определяются плоскости xz, yz. Плоскость xy перпендикулярна оси z, и плоскости xz, yz перпендикулярны соответственно осям y, x (почему?). На каждой из этих плоскостей определены координаты: на плоскости xy — координаты x, y; на плоскости xz — координаты x, z; на плоскости yz — координаты y, z.

Координаты x, y произвольной точки пространства являются координатами ее проекции на плоскость xy.

Действительно, пусть M — данная точка и M_{xy} — ее проекция на плоскость xy. Ее проекция на оси x по теореме о проекциях (или, что то же, о трех перпендикулярах) совпадает с проекцией M_x точки M. А это значит, что координата x точки M совпадает с координатой x ее проекции M_{xy} на плоскости xy.

То же заключение применимо к координате y.

А какой смысл здесь координаты z? По абсолютной величине она равна длине отрезка MM_{xy}, т. е. перпендикуляра, опущенного из точки M на плоскость xy. При этом она положительна, если M лежит с той же стороны от плоскости xy, где положительная полуось z, и отрицательна, если точка M лежит со стороны отрицательной полуоси z. (Здесь мы предполагаем, что M не лежит в плоскости xy; иначе, очевидно, $z=0$.)

Действительно, если M_z — проекция точки M на ось z, то отрезок MM_z перпендикулярен оси z. Точно так же отрезок $M_{xy}O$ перпендикулярен оси z, так как она перпендикулярна плоскости xy. Отрезок MM_{xy} перпендикулярен этой плоскости и, значит, параллелен оси z. Таким образом (если M не совпадает с M_z), мы имеем прямоугольник $OM_{xy}MM_z$. Поэтому $MM_{xy}=$ $=OM_z=|z|$. Точка M_z лежит с той же стороны от плоскости xy, что и точка M. Следовательно, знак, который надо приписать длине MM_{xy}, такой, как сказано.

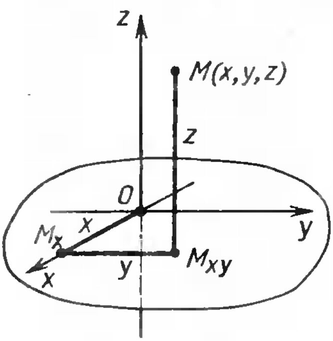


Рис. 298

Полученный вывод позволяет находить координаты произвольной точки M следующим образом. Находим проекцию M_{xy} точки M на плоскость xy, а затем проекцию M_x этой точки M_{xy} на ось x (рис. 298). Тогда длины отрезков MM_{xy}, $M_{xy}M_x$, M_xO, взятые с должными знаками, дадут последовательно координаты z, y, x

точки M. (Так же можно находить координаты, беря другие проекции, на другую координатную плоскость и на другую ось.)

31.3. Нахождение точки с данными координатами

Проведя указанное построение в обратном порядке, можно найти точку с заранее заданными значениями координат: $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$.

Находим на оси x точку M_{x_0} с координатой $x = x_0$. Проводим из нее в плоскости xy перпендикуляр к оси x в сторону, соответствующую знаку y_0, на длину $|y_0|$. Из конца $M_{x_0y_0}$ этого перпендикуляра проводим перпендикуляр к плоскости xy в сторону, соответствующую знаку z_0, на длину $|z_0|$. Конец M этого перпендикуляра и будет иметь координаты x_0, y_0, z_0, как ясно из предыдущего построения.

Проведенное построение точки $M(x_0, y_0, z_0)$ показывает, что не только каждой точке отвечают определенные три координаты, но и обратно: каждой тройке чисел, взятых в определенном порядке, соответствует точка с такими координатами. (Другими словами, между точками пространства и упорядоченными тройками чисел устанавливается взаимно однозначное соответствие.)

31.4. Выражение расстояния между точками

Теорема. *В прямоугольных координатах расстояние между точками $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ выражается формулой*

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}. \qquad (1)$$

Словами: **расстояние между точками равно корню квадратному из суммы квадратов разностей их координат.**

Доказательство. Пусть даны две точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$. Прямая AB может быть параллельна только одной оси, так что она, допустим, не параллельна оси z. Проведем через точки A и B прямые a и b, параллельные оси z и, следовательно, перпендикулярные плоскости xy (рис. 299). Они пересекут эту плоскость xy в точках A' и B' с координатами x_1, y_1 и x_2, y_2 (согласно п. 31.2). Как известно из планиметрии, расстояние $A'B'$ равно:

$$A'B' = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \qquad (2)$$

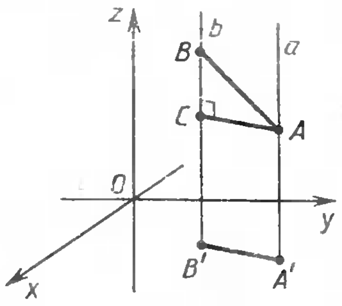


Рис. 299

Если $z_1 = z_2$, то отрезки AB и $A'B'$ представляют противоположные стороны прямоугольника (или совпадают, когда точки A и B лежат на плоскости xy). В этом случае $z_1 - z_2 = 0$ и $AB = A'B'$. Таким образом, формула (2) и дает формулу (1).

Допустим, $z_1 \neq z_2$. Параллельные прямые a и b лежат в одной плоскости. Проведем из точки A перпендикуляр AC на прямую b. Получаем прямоугольный треугольник ABC и прямоугольник $AA'B'C$. Тогда $AC = A'B'$ и $BC = |z_2 - z_1|$.

По теореме Пифагора

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{A'B'^2 + BC^2}.$$

Подставив сюда значение $A'B'$ из выражения (2), получим формулу (1). ■

Замечание. Как равенство (2) является записью теоремы Пифагора в координатах, так и равенство (1) дает выражение пространственной теоремы Пифагора тоже в координатах.

▲ 31.5. Метод координат

Как и в планиметрии, применяя метод координат, можно решать задачи двух видов.

Во-первых, задавая фигуры уравнениями и выражая в координатах различные геометрические соотношения, можно применять алгебру и анализ к решению геометрических задач, к доказательству теорем.

Мы как раз начали с того, что, введя прямоугольные координаты, выразили через них основное геометрическое понятие — расстояние между точками. Это был первый шаг в применении метода координат.

Далее, из формулы расстояния между точками вытекает, например, что сфера радиуса r с центром в точке $A(a, b, c)$ задается уравнением

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2.$$

(Сравните это уравнение с уравнением окружности.)

Применение координат в соединении с алгеброй составляет раздел геометрии, называемый **аналитической геометрией.** Аналитическая геометрия была создана знаменитым французским философом и математиком Рене Декартом (1596—1650).

Во-вторых, пользуясь координатами, можно истолковывать алгебраические и аналитические соотношения и факты геометрически и таким образом применять геометрию к алгебре и анализу. Графическое изображение функций — первый пример такого применения метода координат. ▼

31.6*. Другие системы координат

Координатами вообще называют числа, определяющие положение точки. Например, кроме прямоугольных координат, на плоскости и в пространстве вам известны географические координаты — широта и долгота. Координаты на плоскости

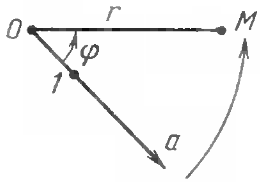


Рис. 300

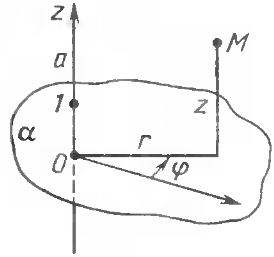


Рис. 301

в пространстве можно вводить бесконечным числом способов. Решая ту или иную геометрическую и физическую задачу методом координат, можно использовать различные координатные системы, выбирая ту из них, в которой данная задача решается проще, удобнее. Рассмотрим некоторые координатные системы, отличные от прямоугольных.

1. Полярные координаты. Возьмем на плоскости точку O, проведем из нее луч a и отметим направление отсчета углов от этого луча (рис. 300).

Каждой точке M плоскости (отличной от точки O) сопоставим в качестве ее координат r, φ — расстояние $r=|OM|$ и угол φ, образованный лучом OM с лучом a. Для точки O расстояние $r=|OO|=0$, а угол φ не определен.

Такие координаты называются **полярными**, точка O называется их полюсом. Этими координатами особенно удобно пользоваться, когда рассматривают движение тела вокруг какого-либо центра, например движение планет вокруг Солнца.

2. Цилиндрические координаты. В пространстве возьмем какую-нибудь плоскость α и введем на ней полярные координаты r, φ с центром в какой-либо точке O. Через эту точку проведем прямую $a \perp \alpha$, на ней введем координату z с нулем в точке O. Каждой точке пространства соответствуют в качестве ее координат полярные координаты r, φ ее проекции на плоскость α и координата z ее проекции на прямую a (рис. 301).

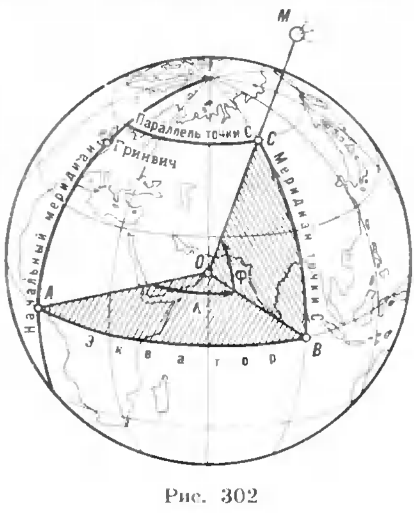


Рис. 302

Координаты эти называются **цилиндрическими**, так как поверхности $r = \text{const}$ представляют собой бесконечные цилиндры. В цилиндрических координатах удобно задавать поверхности вращения.

3. Сферические координаты. На сфере, как на Земле, вводят известные географические координаты — широту φ и долготу λ. Положение любой точки пространства M можно определять тремя координатами: расстоянием $r = |OM|$ от центра O выбранной сферы и широтой и долготой того места на сфере, где луч OM пересекает эту сферу (рис. 302).

Задачи к § 31

Задачи к п. 31.1—31.2

Нахождение координат точки

31.1. Нарисуйте систему координат. Какие координаты равны 0 у точки, лежащей: а) в плоскости (xy); б) в плоскости (yz); в) в плоскости (xz); г) на оси x; д) на оси y; е) на оси z?

31.2. Нарисуйте систему координат. Нарисуйте точку A в плоскости (xy) с координатами $(1, 1, 0)$. Нарисуйте прямую a, проходящую через A и параллельную оси z. а) На прямой a отметьте точку B, у которой координата z равна 3. Запишите координаты точки B. Каковы координаты проекций точки B на оси координат? Нарисуйте проекции точки B на плоскости координат. Каковы координаты этих проекций? Чему равны расстояния от B до плоскостей координат, до осей координат, до начала координат? Какие углы образует прямая OB с плоскостями координат, с осями координат? б) На прямой a отметьте точку C, у которой координата z равна -2, и выполните для нее те же задания, что и в п. а). в) Какие координаты имеет точка прямой a, удаленная от (xy) на 5? г) Какие координаты имеет точка прямой a, удаленная от O на 5? д) Чему равны расстояния от прямой a до плоскостей (xz) и (yz)?

31.3. Нарисуйте систему координат, а в ней точку $A(0, -1, 1)$. Составьте задачи, аналогичные задаче 31.2, для этой точки. Попытайтесь составить и решить аналогичные задачи в общем виде.

31.4. Какие координаты имеет точка A: а) удаленная от каждой плоскости координат на 1; б) удаленная от каждой оси координат на 1; в) удаленная от начала координат на 1, причем (OA) образует равные углы с осями координат; г) удаленная от начала координат на 1, причем (OA) образует с осью y угол $30°$, а с осью z угол $60°$; д) удаленная от начала координат на расстояние d, причем (OA) образует с осью x угол φ_1, а с осью y угол φ_2?

31.5. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 2. Какие координаты имеют его вершины, если: а) начало координат находится в точке B, а положительные лучи осей координат — BA (x), BC (y), BB_1 (z); б) начало координат находится в точке O — центре нижнего основания, а положительные лучи осей координат — OA (x), OD (y), OO_1 (z), где точка O_1 — центр верхнего основания? Какие координаты в каждой из этих систем координат имеют середина ребра DD_1, центр грани CC_1D_1D, центр куба?

31.6. Точки A $(1, 0, 0)$ и B $(-1, 0, 0)$ являются вершинами правильного тетраэдра, основание которого лежит в плоскости (xy). Вычислите координаты двух других его вершин.

Задачи к п. 31.3

Построение точки по координатам

31.7. Укажите положение точки в системе координат, если у нее: а) координата x равна 0; б) координата x и координата y равны 0; в) ровно одна координата равна 0; г) ровно две координаты равны 0.

31.8. Нарисуйте систему координат. Нарисуйте точки A $(1, 1, -1)$, B $(1, -1, 2)$, C $(-2, 1, 0)$, D $(-1, -2, -1)$, K $(0, 0, -3)$, M $(-1, -1, 1)$. Нарисуйте отрезок AB. Пересекает ли он плоскость (xy)? Пересекает ли он другие координатные плоскости? Какой из отрезков с концами в данных точках пересекает плоскость (xy), плоскость (yz), плоскость (zx)? Попробуйте выяснить это, не прибегая к рисунку. Какие из этих отрезков пересекают оси координат?

31.9. Нарисуйте систему координат, а в ней точки A $(-2, 0, 0)$, B $(-1, 1, 0)$, C $(2, -1, -3)$. Найдите координаты проекций этих точек на координатные плоскости, на координатные оси. Для точки C найдите расстояния от нее до плоскостей координат, до осей координат, до начала координат; угол между (OC) и плоскостями координат, угол между (OC) и осями координат. Какие углы образует с плоскостями и осями координат прямая AC, прямая BC?

31.10. 1) Каковы координаты середины отрезка AB, если: а) A $(0, 0, 0)$, B $(2, 3, 4)$; б) A $(-1, 1, 1)$, B $(1, 1, 1)$; в) A $(1, -2, -3)$, B $(-1, 2, 3)$; г) A $(1, 2, -3)$, B $(-2, -4, 6)$? Решите эту задачу в общем случае. 2) Каковы координаты точки, делящей данный отрезок в отношении $2:1$, считая от A? Обобщите задачу. 3) Пусть дана точка C $(-3, 0, 2)$. Каковы координаты точки пересечения медиан треугольника ABC (координаты точек A и B возьмите из задания 1)? Обобщите задачу.

31.11. Нарисуйте точки A $(-5, -1, -2)$ и B $(-5, -1, 3)$. Как расположена прямая AB относительно плоскостей координат, осей координат? Обобщите полученный результат.

Задачи к п. 31.4

31.12. Даны точки A $(5, -1, 3)$, B $(1, 2, -6)$, C $(-3, 3, 2)$. Какая из них ближе к началу координат, к плоскости (yz), к оси x? Сравните расстояния от них до других координатных плоскостей и осей.

31.13. Вычислите расстояние AB, если: а) $A(0, 0, 1)$, $B(1, 0, 0)$; б) $A(-2, 3, -4)$, $B(2, -3, 4)$; в) $A(a, b, c)$, $B(c, a, b)$.

31.14. Определите вид треугольника ABC (по сторонам и углам), если: а) $A(-1, 2, 3)$, $B(3, -1, 2)$, $C(2, 3, -1)$; б) $A(3, -1, 6)$, $B(-1, 7, -2)$, $C(1, -3, 2)$; в) $A(0, 0, a)$, $B(0, a, 0)$, $C(a, 0, 0)$; г) $A(a, b, c)$, $B(c, a, b)$, $C(b, c, a)$.

31.15. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 2. Пусть точка K — середина AD, точка L — середина C_1D_1, точка M — центр грани ABB_1A_1. Используя координатный метод: а) вычислите расстояния KL, LM; б) определите вид треугольника KLM; в) найдите координаты точки пересечения медиан $\triangle KLM$; г) докажите, что точки пересечения медиан треугольников B_1D_1A и BDC_1, а также середина диагонали B_1D лежат на одной прямой; д) найдите, в каких границах лежит $|XY|$, если точка X лежит на D_1A, а точка Y лежит на C_1D, причем $D_1X=C_1Y$; е) определите, в каких точках пересекает ребра куба плоскость, перпендикулярная диагонали B_1D и проходящая через ее середину; ж) докажите, что треугольное сечение куба плоскостью, перпендикулярной его диагонали, является равносторонним треугольником.

Задачи к п. 31.5

31.16. а) Нарисуйте плоскость, перпендикулярную оси x и проходящую через точку $(1, 0, 0)$. Возьмите любую точку в этой плоскости и объясните, почему ее координата по оси x равна 1. б) Нарисуйте точку с координатами $(-2, 3, -1)$. Каким характерным свойством, выраженным в координатах, будут обладать все точки плоскости, проходящей через данную точку и перпендикулярной оси x? оси y? оси z?

31.17. Напишите уравнения плоскостей, перпендикулярных осям координат и проходящих через точки: а) $(0, 1, 0)$; б) $(1, 1, 0)$; в) $(1, 1, 1)$.

31.18. Напишите уравнение плоскости: а) удаленной на 2 от плоскости (xy); б) удаленной на 1 от плоскости $x=3$; в) равноудаленной от плоскостей $y=1$ и $y=-3$; г) удаленной на 1 от оси x и от оси y.

31.19. а) На плоскости xy нарисуйте прямую $y=x$. Нарисуйте плоскость, перпендикулярную (xy), проходящую через эту прямую. Возьмите любую точку на этой плоскости. Объясните, почему для ее координат x и y верно равенство $y=x$. б) Решите задачу, аналогичную а), для прямой $z=y$. в) Решите задачу, аналогичную а), для прямой $x+z=1$. г) Каким характерным свойством обладают точки плоскости, перпендикулярной (xy)? параллельной оси x? д) Обобщите результаты работы над этой задачей.

31.20. Каким условием задается прямая: а) проходящая через точку $(-2, 1, -3)$ и перпендикулярная (xy); (xz); (yz);

б) проходящая через точку $(-2, 1, -3)$, перпендикулярная оси x и пересекающая ее; перпендикулярная оси y и пересекающая ее; перпендикулярная оси z и пересекающая ее; в) совпадающая с осью x; г) параллельная оси x и проходящая через точку $(0, 1, 1)$; д) параллельная оси y и проходящая через точку $(-1, -1, 2)$; е) параллельная плоскости (xy) и (yz) и проходящая через точку $(1, 1, -1)$?

31.21. Объясните, почему совместное выполнение двух условий $x=a$ и $y=b$ задает в пространственной системе координат прямую. Как она расположена по отношению к плоскостям координат? к осям координат?

31.22. Прямая задается условием: а) $x=1, z=3$; б) $x=1$, $y-z=2$; в) $y-z=-1, y-x=1$. Как она расположена по отношению к плоскостям координат? к осям координат?

31.23. Нарисуйте фигуру, для которой выполняются условия: а) $xy=0$; б) $xyz=0$; в) $|x|=2$; г) $|x|=|y|=1$; д) $|x-1|=1$; е) $|z+1|=|z-1|$; ж) $x=y=z$; з) $x^2+y^2=1, z=1$.

31.24. Фигура F задается уравнением: а) $x+y+z=5$; б) $xyz=5$; в) $y^2=xz$. Какая получится фигура в сечении фигуры F плоскостью $x=1$? плоскостью $y=1$?

31.25. Вычислите расстояние от начала координат до фигуры, заданной такими условиями: а) $x=3$; б) $x+y=1$; в) $y-z=-2$; г) $x\geqslant 5, y\geqslant 5, z\geqslant 5$; д) $x^2+y^2=1, z\geqslant 1$; е) $1\leqslant x+y\leqslant 2$; ж) $x=y^2+z^2+1$; з) $(y-2)^2+(z-2)^2=1$.

Задачи на уравнение сферы

31.26. Какие из приведенных уравнений являются уравнениями сферы: а) $x^2-y^2+z^2=1$; б) $x^2+2x+y^2+z^2=1$; в) $x^3+y^3+z^3=1$; г) $x^2+y^2+z^2=1-y$; д) $x^2+y^2+z=1$; е) $2x^2+y^2+z^2=1$; ж) $x^2-x+z^2+z=1-y^2$; з) $x^2+y^2+z^2-x-y=\frac{1}{2}$?

31.27. Какая фигура определяется условиями: $x^2+y^2+z^2=9$ и: а) $x=0$; б) $x=1$; в) $x=2$; г) $x=3$; д) $y=-1$; е) $z=-4$; ж) $|y|=2$; з) $|z|=3$; и) $x+y=1$; к) $y-z=2$; л) $z=x^2+y^2$; м) $x=-2, y=-1$?

31.28. Используя метод координат, докажите, что: а) пересечение шара и плоскости может быть кругом или точкой; б) пересечением двух шаров может быть круг или точка.

31.29. Нарисуйте сферу, уравнение которой $(x-2)^2+(y+2)^2+z^2=1$. Найдите ее точки: а) ближайшие к O; б) ближайшие к каждой из координатных плоскостей; в) ближайшие к каждой из координатных осей; г) ближайшие к точке $(2, 2, 2)$.

31.30. Напишите уравнение сферы: а) радиусом 1 с центром в начале координат; б) радиусом 1 с центром в точке $(-1, -1, 1)$; в) радиусом a с центром в точке $(a, -a, a)$; г) проходящей через точки $(-1, -1, -1)$ и $(-1, -3, -1)$;

д) проходящей через точки $(-2, 0, 0)$, $(0, -2, 0)$ и $(0, 0, 2)$; е) проходящей через точки $(1, 1, 1)$, $(1, -1, -1)$, $(-1, 1, 1)$ и $(2, 0, 0)$; ж) касающейся всех координатных плоскостей; з) радиусом 3, касающейся плоскости (yz) в точке $(0, 1, 2)$.

31.31. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб с ребром 2. Точка K — середина ребра CD, точка L — середина ребра B_1C_1, точка M — середина ребра AA_1. Напишите уравнение сферы, проходящей через точки: а) A, B, C, D_1; б) A_1, B, C, D; в) A, A_1, D, K; г) A, C, B_1, L; д) B, K, L, M. На какой из них лежат все вершины куба?

§ 32. ВЕКТОРЫ

32.1. Понятие вектора

Как вы знаете из физики и планиметрии, **векторными величинами** или, короче, **векторами** называются величины, которые характеризуются не только численным значением (при выбранной единице измерения), но и направлением.

Численное значение вектора называется его **модулем** или **абсолютной величиной**.

Особый случай представляет **нулевой вектор** — его модуль равен нулю, а направления он не имеет.

Ненулевые векторы изображаются **направленными отрезками**. Напомним, что направленным отрезком называется отрезок, у которого указан порядок концов: первый называется началом, второй — концом. Направленные отрезки обычно тоже называют векторами.

Вектор с началом A и концом B обозначается $\overrightarrow{AB}$. **Длина вектора** $\overrightarrow{AB}$ — это модуль этого вектора, т. е. длина отрезка AB.

32.2. Сонаправленность и равенство векторов

Ненулевые векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{MN}$ называются **сонаправленными** или **одинаково направленными**, если лучи AB и MN сонаправлены (рис. 303). Напомним, что понятие сонаправленности лучей было определено в п. 15.1. Для сонаправленных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ применяется обозначение $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$.

Из этого определения и сонаправленности двух лучей, сонаправленных с третьим (лемма п. 15.1), вытекает аналогичное утверждение для векторов: *два вектора, сонаправленные с третьим вектором, сонаправлены.*

Векторы называются равными, если их длины равны и они сонаправлены. (Равенство нулевых векторов определяется лишь первым из этих условий.)

Итак, равенство $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MN}$ означает, что выполняются два

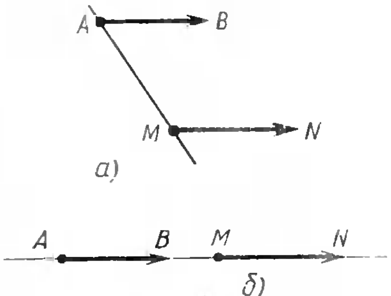


Рис. 303

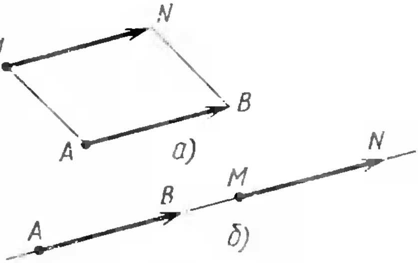


Рис. 304

условия: 1) $|\vec{AB}| = |\vec{MN}|$ и 2) $\vec{AB} \uparrow\uparrow \vec{MN}$. Второе условие проверяется лишь в случае, когда $|\vec{AB}| \neq 0$.

Из данного определения и сонаправленности двух векторов, сонаправленных с третьим вектором, следует, что равенство векторов обладает обычным свойством: *два вектора, равные третьему вектору, равны.*

Действительно, длины у них равны и направление у них одно и то же, так как два вектора, сонаправленные с третьим, сонаправлены.

Отложить от данной точки вектор, равный данному,— значит построить направленный отрезок с началом в этой точке, изображающий данный вектор.

От любой точки в пространстве можно отложить вектор, равный данному, и притом только один. Действительно, пусть заданы вектор $\vec{AB}$ и некоторая точка M. Тогда найдется единственная точка N, такая, что $\vec{MN} = \vec{AB}$. Если точка M не лежит на прямой AB (рис. 304, *а*), то, построив параллелограмм $ABNM$, найдем искомую точку N. Если же точка M лежит на прямой AB (рис. 304, *б*), то на том луче прямой AB, который имеет начало в точке M и сонаправлен с лучом AB, откладываем отрезок MN, равный отрезку AB. В обоих случаях точка N единственная.

Напомним, что два вектора называются **параллельными** (или **коллинеарными**), если изображающие их направленные отрезки параллельны или лежат на одной прямой. Аналогично определяется параллельность и перпендикулярность векторов прямым и плоскостям. О двух параллельных, но не сонаправленных ненулевых векторах говорят, что они **направлены противоположно.** Параллельность, перпендикулярность и противоположная направленность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначаются соответственно так: $\vec{a} \parallel \vec{b}$, $\vec{a} \perp \vec{b}$, $\vec{a} \downarrow\uparrow \vec{b}$.

32.3. Сложение векторов

Как и в планиметрии, сумму **двух векторов** можно найти по правилу треугольника (рис. 305, *а*). А именно: если даны

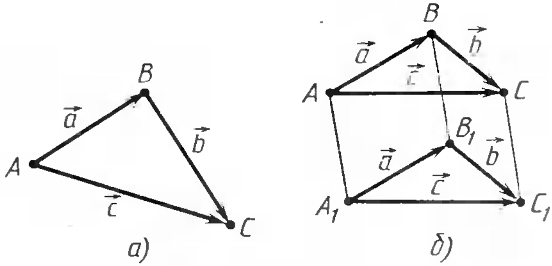


Рис. 305

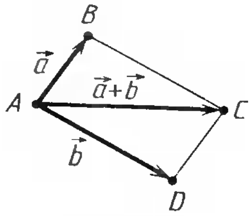


Рис. 306

два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то вектор $\vec{a}$ откладываем от любой точки A: $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$. Затем от его конца — точки B — откладываем вектор $\vec{b}$: $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. Суммой $\vec{a}+\vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}=\overrightarrow{AC}$.

Полученный результат не зависит от выбора точки A. А именно: если взять другую точку A_1 и отложить векторы $\overrightarrow{A_1B_1}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{B_1C_1}=\vec{b}$, то в результате получим вектор $\overrightarrow{A_1C_1}=\overrightarrow{AC}$ (рис. 305, *б*).

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ непараллельны, то их сумму можно получить и пользуясь известным правилом параллелограмма. Согласно этому правилу надо отложить их от одной точки: $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$ (рис. 306), затем построить на отрезках AB и AD параллелограмм $ABCD$. Вектор $\overrightarrow{AC}$ будет суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$.

Свойства операции сложения векторов в стереометрии те же самые, что и в планиметрии, и доказываются они точно так же, как в планиметрии. Перечислим эти свойства, сопровождая их рисунками, из которых ясно, как они доказываются.

1. Переместительное свойство, или коммутативность: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ *для любых векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ (рис. 307).

2. Сочетательное свойство, или ассоциативность: $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ *для любых векторов* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (рис. 308).

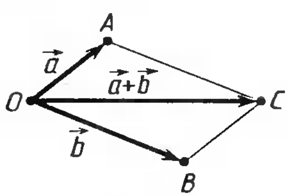


Рис. 307

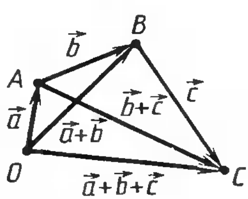


Рис. 308

Рис. 309

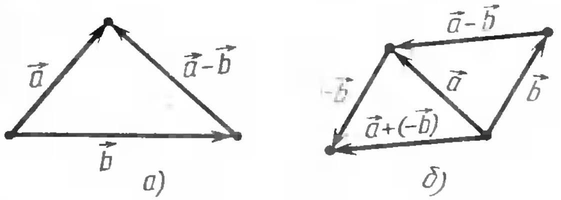


Рис. 310

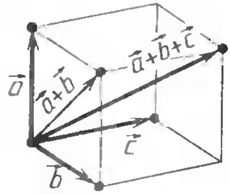


Рис. 311

3. С в о й с т в о н у л ь - в е к т о р а: *$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ для любого вектора $\vec{a}$.*

4. С у щ е с т в о в а н и е и е д и н с т в е н н о с т ь п р о т и в о п о л о ж н о г о в е к т о р а: *для каждого вектора $\vec{a}$ существует, и притом единственный, противоположный ему вектор — $\vec{a}$, такой, что $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$* (рис. 309).

Вычитание векторов — это операция, обратная сложению векторов. Вычесть из вектора $\vec{a}$ вектор $\vec{b}$ — значит найти такой вектор $\vec{c}$, который в сумме с вектором $\vec{b}$ даст вектор $\vec{a}$ (рис. 310, *а*). Чтобы вычесть из вектора $\vec{a}$ вектор $\vec{b}$, можно к вектору $\vec{a}$ прибавить вектор $-\vec{b}$ (рис. 310, *б*).

По правилу параллелограмма сумма двух векторов, непараллельных одной прямой, представляется диагональю параллелограмма, построенного на данных векторах, отложенных от одной точки.

Аналогично сумма трех векторов, непараллельных одной плоскости, представляется диагональю параллелепипеда, построенного на данных векторах, отложенных от одной точки, как на ребрах (рис. 311). (Убедитесь в этом.)

32.4. Разложение вектора на составляющие

Напомним, что **составляющими данного вектора** называются векторы, дающие в сумме этот вектор. В планиметрии доказали, что *каждый вектор на плоскости можно единственным образом разложить на составляющие, лежащие на двух данных пересекающихся прямых* (рис. 312).

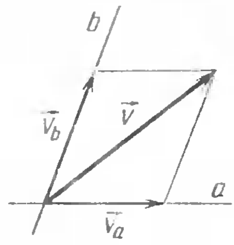


Рис. 312

В пространстве разложим вектор либо на две составляющие, параллельные данной прямой и плоскости, либо на три составляющие, параллельные трем пересекающимся прямым, не лежащим в одной плоскости.

Так, вес груза, висящего на треноге, разлагается на три составляющие, направленные вдоль ног треноги (рис. 313).

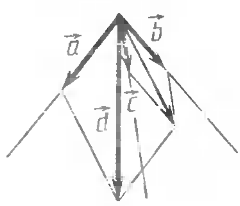


Рис. 313

Устойчивость мостов, куполов и сводов зданий и других строительных конструкций основана на расчете разложения силы тяжести на составляющие, проходящие через точки опоры. Вспомните, например, знаменитого «Медного всадника», опирающегося лишь на три точки.

1. Разложение вектора по прямой и плоскости. Пусть даны плоскость α и пересекающая ее прямая a. Возьмем какой-нибудь вектор $\vec{v}$ и отложим его от точки пересечения a и α — точки O: $\overrightarrow{OV}=\vec{v}$ (рис. 314). Пусть точка A — проекция точки V в направлении прямой a на плоскость α. Тогда

$$\overrightarrow{OV}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AV}, \tag{1}$$

причем $\overrightarrow{OA}\parallel\alpha$ и $\overrightarrow{AV}\parallel a$. Поэтому векторы $\vec{v}_a=\overrightarrow{AV}$ и $\vec{v}_\alpha=\overrightarrow{OA}$ являются составляющими вектора $\vec{v}$ по прямой a и плоскости α, т. е. $\vec{v}=\vec{v}_a+\vec{v}_\alpha$.

2. Разложение вектора по трем прямым. Возьмем три прямые a, b, c, пересекающиеся в точке O и не лежащие в одной плоскости. Отложим от O данный вектор $\overrightarrow{OV}=\vec{v}$ (рис. 315). Приняв плоскость, проходящую через прямые b и c, за α, разложим вектор $\vec{v}$ по прямой a и плоскости α: $\vec{v}=\vec{v}_a+\vec{v}_\alpha$. Составляющую $\vec{v}_\alpha$ разложим по прямым b и c. Получим $\vec{v}_\alpha=\vec{v}_b+\vec{v}_c$. А тогда $\vec{v}=\vec{v}_a+\vec{v}_b+\vec{v}_c$, т. е. получено искомое разложение вектора $\vec{v}$ по прямым a, b, c.

Разложение вектора по трем прямым не сводится к разложению его по двум прямым лишь тогда, когда точка V не лежит

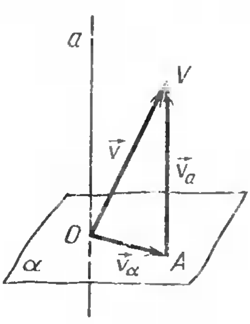


Рис. 314

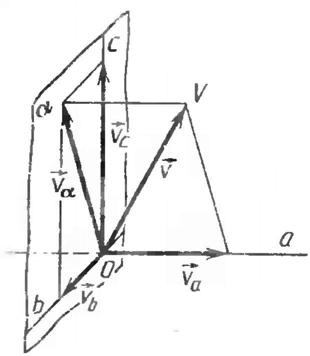


Рис. 315

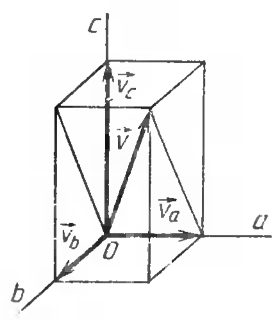


Рис. 316

ни в одной из плоскостей, определяемых парами прямых a и b, a и c, b и c. В этом случае построение составляющих $\vec{v}_a$, $\vec{v}_b$, $\vec{v}_c$ сводится к построению параллелепипеда, диагональю которого является отрезок $\overrightarrow{OV}$ и ребра которого, исходящие из O, лежат на прямых a, b, c. Три плоскости граней этого параллелепипеда определяются тремя парами пересекающихся прямых: a и b, a и c, b и c, а три другие плоскости его граней параллельны этим плоскостям и проходят через точку V (рис. 316).

32.5. Умножение вектора на число

Напомним определение умножения вектора на число, данное еще в планиметрии.

Пусть даны ненулевой вектор $\vec{a}$ и действительное число $x \neq 0$. **Произведением вектора $\vec{a}$ на число x** называется такой вектор $x\vec{a}$, который, во-первых, имеет длину $|x|\,|\vec{a}|$ и, во-вторых, сонаправлен с вектором $\vec{a}$, если $x>0$, и направлен противоположно вектору $\vec{a}$, если $x<0$.

Итак, если $\vec{b}=x\vec{a}$, причем $x\neq 0$, $\vec{a}\neq\vec{0}$, то: 1) $|\vec{b}|=|x|\,|\vec{a}|$ и 2) $\vec{b}\uparrow\uparrow\vec{a}$, если $x>0$, и $\vec{b}\downarrow\uparrow\vec{a}$, если $x<0$ (рис. 317).

Если же $\vec{a}=\vec{0}$ или $x=0$, то полагают, что вектор $x\vec{a}=\vec{0}$. Следующие пять свойств операции умножения вектора на число непосредственно вытекают из определения этой операции.

Свойство 1. $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$.

Свойство 2. $x(y\vec{a})=(xy)\vec{a}$.

Свойство 3. Если $x\vec{a}=y\vec{a}$ и $\vec{a}\neq\vec{0}$, то $x=y$.

Свойство 4. $0\cdot\vec{a}=\vec{0}$.

Свойство 5. $(-1)\vec{a}=-\vec{a}$.

Операции сложения векторов и умножения вектора на число связаны двумя распределительными (или дистрибутивными) законами.

Свойство 6. $(x+y)\vec{a}=x\vec{a}+y\vec{a}$.

Свойство 7. $x(\vec{a}+\vec{b})=x\vec{a}+x\vec{b}$.

Оба эти свойства известны из планиметрии и относятся к планиметрии, так как выполняющиеся в них действия производятся с векторами, параллельными одной плоскости (если отложить эти векторы от одной точки, то изображающие их направленные отрезки окажутся лежащими в одной плоскости). Более того, свойство 6 касается лишь векторов, параллельных одной прямой. Оно непосредственно вытекает из определений сложения векторов и умножения вектора на число.

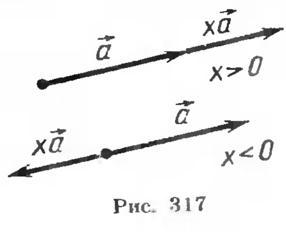


Рис. 317

Напомним следующий признак параллельности векторов, доказанный в курсе планиметрии. (Вспомните его доказательство.)

Т е о р е м а *(признак параллельности векторов).* ***Два вектора параллельны тогда и только тогда, когда один из них получается из другого умножением на число.***

Этот признак вместе с результатами предыдущего пункта позволяет разложить каждый вектор $\vec{v}$ по любым трем векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, непараллельным одновременно одной плоскости. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ненулевые (в противном случае они параллельны некоторой плоскости).

Возьмем три пересекающиеся прямые a, b, c, параллельные соответственно векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, и разложим вектор $\vec{v}$ на составляющие по этим прямым:

$$\vec{v}=\vec{v}_a+\vec{v}_b+\vec{v}_c. \tag{2}$$

Так как $\vec{v}_a \parallel \vec{a}$, $\vec{v}_b \parallel \vec{b}$, $\vec{v}_c \parallel \vec{c}$ и векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ненулевые, то по признаку параллельности векторов

$$\vec{v}_a=x\vec{a},\ \vec{v}_b=y\vec{b},\ \vec{v}_c=z\vec{c}.$$

Подставив эти равенства в (2), получим:

$$\vec{v}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}. \tag{3}$$

Равенство (3) называют **разложением вектора $\vec{v}$ по векторам** $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Как будет доказано в следующем параграфе, такое разложение единственно.

Задачи к § 32

Задачи к п. 32.1, 32.2

32.1. Могут ли равные векторы лежать на: а) скрещивающихся прямых; б) ребрах одного и того же правильного многогранника?

32.2. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. а) Укажите вектор, равный $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{D_1D}$; $\overrightarrow{B_1C}$; $\overrightarrow{A_1B}$. б) Отложите вектор, равный вектору $\overrightarrow{C_1D}$, от точки B_1; от точки A. в) Равны ли векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{B_1D_1}$? $\overrightarrow{A_1B}$ и $\overrightarrow{B_1C}$?

32.3. Какую фигуру образуют концы равных векторов, отложенных от всех точек отрезка? от всех точек плоской фигуры? Обобщите задачу.

Задачи к п. 32.3

Основная задача

32.4. Откуда следует неравенство $|\vec{a}+\vec{b}|\leqslant|\vec{a}|+|\vec{b}|$? Запишите аналогичное неравенство для n векторов. Дайте геометрическое истолкование этому обобщению для случая трех векторов, не лежащих в одной плоскости.

* * *

32.5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Нарисуйте вектор $\overrightarrow{AX}$, равный сумме векторов $\overrightarrow{AA_1}$ и: а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{C_1C}$; г) $\overrightarrow{B_1C}$; д) $\overrightarrow{DC_1}$; е) $\overrightarrow{A_1C}$; ж) $\overrightarrow{AC_1}$.

32.6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Нарисуйте вектор $\overrightarrow{AX}$, равный: а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CC_1}$; б) $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{B_1D_1}$; в) $\overrightarrow{B_1D_1}+\overrightarrow{DC_1}$; г) $\overrightarrow{B_1C}+\overrightarrow{DC_1}$; д) $\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{AD_1}$; е) $\overrightarrow{C_1B}+\overrightarrow{C_1D}$; ж) $\overrightarrow{DC_1}+\overrightarrow{A_1C}$.

32.7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Нарисуйте вектор $\overrightarrow{AX}$, равный: а) $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DD_1}$; б) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}$; в) $\overrightarrow{D_1C_1}+\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{BB_1}$; г) $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{D_1B_1}$; д) $\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{C_1A_1}$; е) $\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{AD_1}+\overrightarrow{AC}$.

32.8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Равны ли векторы: а) $\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{AD_1}$ и $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC_1}$; б) $\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{B_1D}+\overrightarrow{A_1D}$; в) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC_1}$ и $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC_1}$; г) $\overrightarrow{DB_1}+\overrightarrow{A_1D}$ и $\overrightarrow{A_1C}+\overrightarrow{DA_1}$; д) $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1}$; $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{C_1B_1}$ и $\overrightarrow{DA_1}+\overrightarrow{CB_1}+\overrightarrow{AC}$?

32.9. Решите задачи 32.5 и 32.6, заменив сумму на разность.

32.10. Проиллюстрируйте на параллелепипеде такие векторные равенства: а) $\vec{a}+(\vec{b}-\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})-\vec{c}=(\vec{a}-\vec{c})+\vec{b}$; б) $\vec{a}-(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}-\vec{b})-\vec{c}=(\vec{a}-\vec{c})-\vec{b}$; в) $\vec{a}-(\vec{b}-\vec{c})=(\vec{a}-\vec{b})+\vec{c}=(\vec{a}+\vec{c})-\vec{b}$.

32.11. Пусть A и B — две любые точки. Докажите, что при любом выборе точек O_1 и O_2 верно равенство

$$\overrightarrow{O_1B}-\overrightarrow{O_1A}=\overrightarrow{O_2B}-\overrightarrow{O_2A}.$$

32.12. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Укажите такую точку X, что верно равенство

$$\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}+\overrightarrow{XD}+\overrightarrow{XA_1}+\overrightarrow{XB_1}+\overrightarrow{XC_1}+\overrightarrow{XD_1}=\vec{0}.$$

Единственна ли такая точка? Решите аналогичную задачу для тетраэдра. Как обобщить полученные результаты?

Задачи к п. 32.4

32.13. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Разложите на составляющие по плоскости ABC и прямой AA_1 векторы: а) $\overrightarrow{AB_1}$; б) $\overrightarrow{CA_1}$; в) $\overrightarrow{D_1B}$; г) $\overrightarrow{DK}$, где точка K — центр грани ABA_1B_1. Выберите сами другую пару перпендикулярных прямой и плоскости и решите ту же задачу.

32.14. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед. Точка K — середина ребра BB_1, точка L — центр симметрии грани CC_1D_1D. Разложите на составляющие по прямым AB, AD, AA_1 векторы: а) $\overrightarrow{AC_1}$; б) $\overrightarrow{B_1D}$; в) $\overrightarrow{DK}$; г) $\overrightarrow{KL}$. Выберите сами любую другую тройку взаимно перпендикулярных прямых и решите ту же задачу.

32.15. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Разложите на составляющие по прямым AB, AD, AA_1 векторы: а) $\overrightarrow{D_1A}$; б) $\overrightarrow{D_1C}$; в) $\overrightarrow{D_1B}$. Выберите любую другую тройку прямых и разложите по ним те же векторы.

32.16. Пусть $PABC$ — правильный тетраэдр, точка Q — центр его основания, точка K — середина AC, точка L — центр грани APC, точка M — центр грани PBC. Векторы: а) $\overrightarrow{PQ}$; б) $\overrightarrow{PK}$; в) $\overrightarrow{KQ}$; г) $\overrightarrow{LM}$ — разложите на составляющие по прямым PA, PB, PC. Эти же векторы разложите на составляющие по прямым AB, AC, AP.

Задачи к п. 32.5

Основные задачи

32.17. а) Точка K — середина отрезка AB. Докажите, что при любом выборе точки O справедливо равенство $\overrightarrow{OK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$. б) Точка T — точка пересечения медиан треугольника ABC. Докажите, что при любом выборе точки O справедливо равенство $\overrightarrow{OT}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$.

32.18. Пусть точки K и L не лежат на плоскости ABC. Докажите, что параллельность прямой KL и плоскости ABC равносильна выполнению равенства $\overrightarrow{KL}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$.

32.19. Используя векторные соотношения, запишите равенства, равносильные таким фактам: а) точка X лежит на прямой AB; б) точка X лежит на отрезке AB; в) точка X лежит на плоскости ABC; г) точка X лежит в треугольнике ABC.

* * *

32.20. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Нарисуйте вектор $\overrightarrow{AX}$, равный сумме $\overrightarrow{AA_1}$ и: а) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; б) $2\,\overrightarrow{BC}$; в) $\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1C}$; г) $\frac{1}{2}\overrightarrow{B_1C}$; д) $-\frac{1}{2}\overrightarrow{DC_1}$; е) $\frac{1}{2}\overrightarrow{A_1C}$; ж) $-2\,\overrightarrow{AC}$.

32.21. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Нарисуйте вектор $\overrightarrow{CX}$, равный: а) $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB_1}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA_1}$; б) $2\,\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$; в) $-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+2\,\overrightarrow{CA_1}-\overrightarrow{C_1B}$; г) $\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1C}+2\,\overrightarrow{CB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{A_1C}$.

32.22. а) Пусть $\vec{a}+2\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{c}=\vec{0}$. Выразите из этого равенства каждый из векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. б) Сделайте то же, если дано равенство $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{0}$.

32.23. Точки A, B, C не лежат на одной прямой. Какую фигуру образуют точки X, такие, что: а) $\overrightarrow{AX}=\alpha\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, $0\leqslant\alpha\leqslant1$; б) $\overrightarrow{AX}=\alpha\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, $\alpha\geqslant0$; в) $\overrightarrow{AX}=\alpha\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, $\alpha\in\mathbf{R}$; г) $\overrightarrow{AX}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$, $0\leqslant\alpha\leqslant1$, $0\leqslant\beta\leqslant1$; д) $\overrightarrow{AX}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$, $0\leqslant\alpha\leqslant1$, $\beta\geqslant0$; е) $\overrightarrow{AX}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$, $\alpha\beta\geqslant0$; ж) $\overrightarrow{AX}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$, $\alpha\leqslant1$, $\beta\leqslant1$?

32.24. $PABC$ — тетраэдр. Какую фигуру образуют точки X, такие, что: а) $\overrightarrow{PX}=\alpha\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$, $0\leqslant\alpha\leqslant1$; б) $\overrightarrow{PX}=\alpha\overrightarrow{PA}+\beta\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$, $0\leqslant\alpha\leqslant1$, $0\leqslant\beta\leqslant1$; в) $\overrightarrow{PX}=\alpha\overrightarrow{PA}+\beta\overrightarrow{PB}+\gamma\overrightarrow{PC}$, $0\leqslant\alpha\leqslant1$, $0\leqslant\beta\leqslant1$, $0\leqslant\gamma\leqslant1$?

32.25. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Разложите по векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA_1}$ такие векторы: а) $\overrightarrow{CK}$; б) $\overrightarrow{B_1L}$; в) $\overrightarrow{LM}$; г) $\overrightarrow{KL}$; д) $\overrightarrow{DM}$; е) $\overrightarrow{KN}$ (K — середина A_1D_1, L — середина CD, B_1 — середина отрезка MC_1, N — середина BC).

32.26. $PABC$ — тетраэдр. Разложите по векторам $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$ и $\overrightarrow{PC}$ такие векторы: а) $\overrightarrow{PK}$; б) $\overrightarrow{PQ}$; в) $\overrightarrow{KL}$; г) $\overrightarrow{QM}$ (K — середина AC, Q — точка пересечения медиан треугольника ABC, L — середина PB, M — точка пересечения медиан треугольника PAB).

Применение векторов к получению геометрических результатов

32.27. $ABCD$ и AB_1CD_1 — два параллелограмма. Докажите, что $BB_1 \parallel DD_1$.

32.28. $PABC$ — тетраэдр. а) Докажите, что середины ребер AB, BC, CD, DA лежат в одной плоскости и, более того, являются вершинами параллелограмма. б) Пусть точка K лежит на AB и $AK=\frac{1}{3}AB$, точка L лежит на BC и $BL=\frac{1}{3}BC$, точка M лежит на CD и $CM=\frac{1}{3}CD$, точка N лежит на DA и $DN=\frac{1}{3}DA$. Каково взаимное расположение прямых KM и NL?

32.29. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Докажите, что на диагонали B_1D лежат середины других диагоналей параллелепипеда и точки пересечения медиан треугольников A_1C_1B и D_1AC. В каком отношении эти точки делят B_1D?

32.30. Из вершин A и D правильного тетраэдра $ABCD$ одновременно и с одной скоростью стали двигаться по ребрам

AC и DB точки X и Y. Докажите, что (XY) все время параллельна одной и той же плоскости.

32.31. Дана треугольная призма. Могут ли диагонали трех ее боковых граней быть параллельными одной и той же плоскости?

32.32. К вершине A треножника $ABCD$ подвешен груз P. Ножки треножника равны, укреплены на горизонтальной плоскости, образуют между собой прямые углы, а с вертикалью равные углы. Найдите усилия в каждой из ножек треножника.

§ 33. КООРДИНАТЫ И ВЕКТОРЫ

33.1. Координаты вектора

Координаты вектора в пространстве определяются так же, как на плоскости. А именно справедлива следующая теорема:

Т е о р е м а *(о координатном представлении вектора).* ***Пусть в пространстве введена прямоугольная система координат с единичными векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ координатных осей x, y, z. Тогда каждый вектор $\vec{v}$ единственным образом представляется в виде***

$$\vec{v}=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k}. \qquad (1)$$

Числа v_x, v_y, v_z называются **координатами вектора** $\vec{v}$ **относительно векторов** $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, которые называются **базисными векторами** или, короче, **базисом.**

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отложим вектор $\vec{v}$ от начала координат — точки O. Получим вектор $\overrightarrow{OA}=\vec{v}$ (рис. 318). Разложим его по координатным осям:

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA_x}+\overrightarrow{OA_y}+\overrightarrow{OA_z}. \qquad (2)$$

Так как $\overrightarrow{OA_x}\parallel\vec{i}$, то по признаку параллельности векторов $\overrightarrow{OA_x}=v_x\vec{i}$. Аналогично $\overrightarrow{OA_y}=v_y\vec{j}$, $\overrightarrow{OA_z}=v_z\vec{k}$. Подставив эти выражения в (2), получим (1). Первое утверждение теоремы доказано. Докажем единственность координат v_x, v_y, v_z вектора $\vec{v}$.

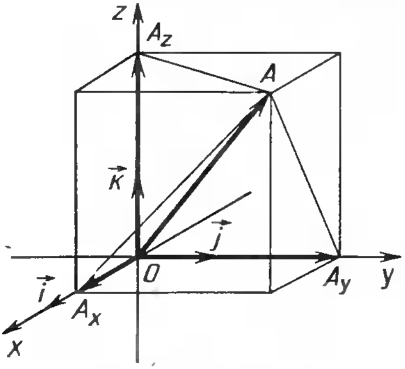


Рис. 318

Допустим, что, кроме разложения (1), имеется еще какое-нибудь разложение $\vec{v}$ по векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$:

$$\vec{v}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}. \qquad (3)$$

Тогда из (1) и (3) следует, что

$$v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}. \qquad (4)$$

Поэтому

$$(v_x-a)\vec{i}=(b-v_y)\vec{j}+(c-v_z)\vec{k}. \qquad (5)$$

Слева в равенстве (5) стоит вектор, параллельный оси x, т. е. перпендикулярный плоскости yz, а справа стоит вектор, параллельный плоскости yz. Они могут быть равны лишь в случае, когда оба они нулевые. Поэтому $v_x-a=0$, т. е. $a=v_x$. Аналогично $b=v_y$, $c=v_z$. Теорема полностью доказана.

На основании доказанной теоремы, если в пространстве введены координаты, каждый вектор $\vec{v}$ можно задавать его координатами v_x, v_y, v_z и писать короче: $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ вместо равенства (1).

Как показывает следующая теорема, действия с векторами можно свести к аналогичным действиям с их координатами.

Теорема *(о действиях с координатами векторов).* ***При сложении векторов их соответствующие координаты складываются. При умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.***

Доказательство. Пусть

$$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b} \qquad (6)$$

и

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k},\ \vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k},\ \vec{c}=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}. \qquad (7)$$

Надо доказать, что

$$c_x=a_x+b_x,\ c_y=a_y+b_y,\ c_z=a_z+b_z. \qquad (8)$$

Действительно, из равенств (6) и (7) получаем, что

$$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}=(a_x+b_x)\vec{i}+(a_y+b_y)\vec{j}+(a_z+b_z)\vec{k}.$$

Значит, числа a_x+b_x, a_y+b_y и a_z+b_z — координаты вектора $\vec{c}$, т. е. имеют место равенства (8).

Докажем второе утверждение теоремы. Рассмотрим произведение $k\vec{a}$. Получим $k\vec{a}=k(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})=(ka_x)\vec{i}+(ka_y)\vec{j}+$ $+(ka_z)\vec{k}$. Значит, числа ka_x, ka_y, ka_z — координаты вектора $k\vec{a}$, что и требовалось доказать.

Следствие. ***Векторы параллельны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны.***

Следствие вытекает из доказанной теоремы и признака параллельности векторов (п. 32.5).

33.2. Равенство координат векторов и координат точек

Как и в планиметрии, имеет место следующая теорема:

Теорема *(о равенстве координат).* ***Если в пространстве введена система прямоугольных координат x, y, z с началом***

в точке O и единичными векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ координатных осей x, y, z, то координаты любой точки M совпадают с соответствующими координатами ее радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$.

Доказательство. Возьмем некоторую точку M с координатами x_M, y_M, z_M. По определению x_M — это координата на оси x точки M_x — проекции точки M на эту ось. Аналогично y_M и z_M определяются как координаты проекций M_y и M_z точки M на оси y и z. Отрезок OM является диагональю прямоугольного параллелепипеда с ребрами OM_x, OM_y, OM_z (он может вырождаться в прямоугольник, отрезок и даже точку). Следовательно,

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_x}+\overrightarrow{OM_y}+\overrightarrow{OM_z}.$$

Как известно из планиметрии, $\overrightarrow{OM_x}=x_M\vec{i}$, $\overrightarrow{OM_y}=y_M\vec{j}$, $\overrightarrow{OM}=z_M\vec{k}$. Поэтому

$$\overrightarrow{OM}=x_M\vec{i}+y_M\vec{j}+z_M\vec{k},$$

т. е. координаты точки M являются координатами ее радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$. Теорема доказана.

Эта теорема позволяет найти координаты вектора, отложенного от любой точки, если мы знаем координаты его начала и его конца.

Следствие 1 *(о координатах вектора).* ***Координаты вектора, отложенного от произвольной точки, равны разности соответствующих координат его конца и его начала.***

Доказательство. Пусть точка A имеет координаты x_A, y_A, z_A, а точка B — координаты x_B, y_B, z_B. Тогда по предыдущей теореме

$$\overrightarrow{OA}=x_A\vec{i}+y_A\vec{j}+z_A\vec{k} \text{ и } \overrightarrow{OB}=x_B\vec{i}+y_B\vec{j}+z_B\vec{k}.$$

Поэтому

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_B-x_A)\,\vec{i}+(y_B-y_A)\,\vec{j}+(z_B-z_A)\,\vec{k},$$

что и требовалось доказать.

Следствие 2 *(о длине вектора).* ***Длина вектора равна корню квадратному из суммы квадратов его координат, т. е. если***

$$\vec{v}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}, \text{ то}$$
$$|\vec{v}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}. \qquad (9)$$

Доказательство. Отложим вектор $\vec{v}$ от начала — точки O: $\vec{v}=\overrightarrow{OV}$. Тогда точка V будет иметь координатами числа a, b, c. По формуле расстояния между точками (п. 31.4)

$$|OV|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

Но $|OV|=|\overrightarrow{OV}|=|\vec{v}|$, т. е. имеет место (9). ■

33.3. Скалярное умножение векторов

Напомним, что **скалярным произведением двух ненулевых векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.**

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначают $\vec{a}\cdot\vec{b}$. Поэтому согласно определению

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi,\ \varphi=(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}}). \qquad (10)$$

Напомним также, что **углом между двумя ненулевыми векторами** называется величина образуемого ими угла, когда они отложены от одной точки (рис. 319). Из леммы об углах с сонаправленными сторонами вытекает, что угол между векторами не зависит от выбора той точки, от которой они откладываются.

Если хотя бы один из векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ нулевой, то считается по определению, что $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

Выделяют два важных частных случая:

1) *Если* $\vec{a}=\vec{b}$, *то* $\varphi=0^\circ$, $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ и из (10) следует, что $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$. Произведение $\vec{a}\cdot\vec{a}$ обозначается $\vec{a}^2$ и называется **скалярным квадратом вектора** $\vec{a}$.

2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ *для ненулевых векторов* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *тогда и только тогда, когда* $\vec{a}\perp\vec{b}$. Действительно, в этом случае равенство $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ равносильно тому, что $\cos\varphi=0$, т. е. $\vec{a}\perp\vec{b}$.

Выразим скалярное произведение векторов $\vec{a}(a_x,\ a_y,\ a_z)$ и $\vec{b}(b_x,\ b_y,\ b_z)$ через координаты. Отложим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ от начала O: $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$. Если $\vec{a}\nparallel\vec{b}$, то получим треугольник OAB, угол φ которого при вершине O равен углу между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 320). По ОТП (теореме косинусов)

$$AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cos\varphi, \qquad (11)$$

т. е.

$$(\vec{b}-\vec{a})^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}.$$

Поэтому $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}(\vec{a}^2+\vec{b}^2-(\vec{b}-\vec{a})^2)=\frac{1}{2}(a_x^2+a_y^2+a_z^2+b_x^2+$ $+b_y^2+b_z^2-(b_x-a_x)^2-(b_y-a_y)^2-(b_z-a_z)^2)=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$

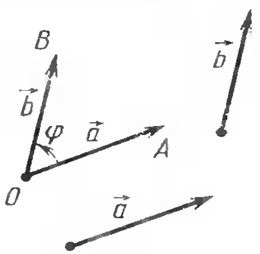


Рис. 319

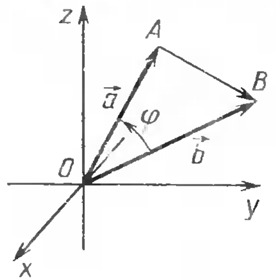


Рис. 320

Случай, когда $\vec{a} \parallel \vec{b}$, т. е. $\vec{b} = \lambda \vec{a}$, рассмотрите самостоятельно. Он дает тот же результат.

Итак, мы доказали, что *скалярное произведение векторов равно сумме произведений их одноименных координат:*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \qquad (12)$$

Из этой формулы непосредственно вытекают следующие свойства скалярного умножения:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ *для любых векторов* $\vec{a}$, $\vec{b}$;

2) $(x\vec{a}) \cdot \vec{b} = x(\vec{a} \cdot \vec{b})$ *для любых векторов* $\vec{a}$, $\vec{b}$ и любого числа x;

3) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ *для любых векторов* a, b, c.

Операция скалярного умножения векторов позволяет находить углы между ненулевыми векторами по формуле

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \qquad (13)$$

и длины векторов по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}. \qquad (14)$$

33.4. Уравнение плоскости

Как вы знаете, в системе прямоугольных координат x, y на плоскости каждая прямая задается уравнением вида

$$Ax + By + C = 0, \qquad (15)$$

причем коэффициенты A, B не обращаются в нуль одновременно.

Для плоскости в пространстве верен аналогичный результат.

Теорема. ***Плоскость в пространстве задается в системе прямоугольных координат x, y, z уравнением вида***

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (16)$$

при условии, что коэффициенты A, B, C не обращаются в нуль одновременно.

Доказательство. Пусть в пространстве введены прямоугольные координаты x, y, z и задана некоторая плоскость α. Возьмем любой ненулевой вектор, перпендикулярный плоскости α. Назовем его вектором нормали к плоскости α (рис. 321) и обозначим $\vec{n}$ (A, B, C).

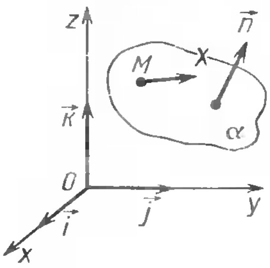


Рис. 321

Положение плоскости α в пространстве вполне определится, если, кроме $\vec{n}$, задать какую-нибудь точку $M(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$. Точка $X(x, y, z)$ принадлежит плоскости α тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{MX}$ перпендикулярен вектору $\vec{n}$, т. е. тогда и только тогда, когда

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{MX} = 0. \qquad (17)$$

Равенство (17) и является уравнением плоскости α. Так как $\overrightarrow{MX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OM}$, то, используя формулу (12) для скалярного произведения, получаем, что

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{MX} = A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0). \qquad (18)$$

Подставив это выражение в левую часть (17) и положив $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$, получим (16). $\blacksquare$

Верно также и обратное утверждение: уравнение вида (16) при условии, что среди коэффициентов A, B, C есть ненулевые, задает в пространстве плоскость в системе прямоугольных координат. Если $A \neq 0$, то такой плоскостью является плоскость α, проходящая через точку $M\left(-\frac{D}{A}, 0, 0\right)$ и имеющая вектор $\vec{n}(A, B, C)$ своим нормальным вектором.

Задачи к § 33

Задачи к п. 33.1

Основная задача

33.1. а) Дан вектор $\vec{a}(x_0, y_0, z_0)$. Какие координаты имеет вектор $-\vec{a}$? б) Даны векторы $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$. Какие координаты имеет вектор $\vec{a} - \vec{b}$?

* * *

33.2. Какие координаты имеет вектор $\overrightarrow{OA}$, если координаты точки A: а) $(1, 2, -3)$; б) $(-5, 4, -1)$; в) (x_0, y_0, z_0)?

33.3. Какие координаты имеет единичный вектор (вектор, длина которого равна 1), если он образует: а) с осью x угол $30°$, а с осью y угол $45°$; б) с плоскостью (xy) угол $30°$, а с плоскостью (yz) угол $30°$; в) с осью z угол $60°$, а с плоскостью (xz) угол $45°$; г) с осями координат углы φ_1, φ_2, φ_3?

33.4. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб с ребром 1. Начало координат находится в точке B, положительные лучи осей координат — BA (x), BC (y), BB_1 (z). Какие координаты имеет вектор: а) $\overrightarrow{BC_1}$; б) $\overrightarrow{BD_1}$; в) $\overrightarrow{AC}$; г) $\overrightarrow{DA}$; д) $\overrightarrow{CD}$; е) $\overrightarrow{A_1C}$; ж) $\overrightarrow{KL}$; з) $\overrightarrow{AM}$; и) $\overrightarrow{ML}$? (Точка K — середина AA_1, точка L — середина CD, точка M — центр BB_1C_1C.)

33.5. Нарисуйте вектор с координатами: а) $(0, 0, 1)$; б) $(-2, 0, 1)$; в) $(-3, -1, -2)$; г) $(-4, 1, 3)$. Для задач в) и г) вычислите длину вектора и углы, которые он образует с осями координат и плоскостями координат.

33.6. Даны векторы $\vec{a}(-2, 1, 0)$ и $\vec{b}(3, -1, -2)$. Какие координаты имеют векторы: а) $-\vec{b}$; б) $2\vec{a}$; в) $\vec{b}-\vec{a}$; г) $\frac{1}{3}\vec{a}+2\vec{b}$; д) $2\vec{a}-4\vec{b}$; е) $\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$; ж) $\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}$?

33.7. Запишите координаты какого-либо вектора, параллельного $\vec{a}$, если координаты $\vec{a}$ таковы: а) $(2, -1, 3)$; б) $(4, 0, 1)$; в) $(0, -2, 0)$; г) (x_0, y_0, z_0).

Задачи к п. 33.2

33.8. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ и его длину, если: а) $A(0, 0, 0)$, $B(2, -3, 1)$; б) $A(-1, 1, -1)$, $B(0, -1, 0)$; в) $A(-1, 2, 3)$, $B(-1, 2, -3)$; г) $A(a, b, c)$, $B(c, a, b)$.

33.9. Пусть $A(2, 1, 0)$, $B(0, -2, 1)$, $C(1, 0, -2)$, $D(1, 1, 1)$. а) Есть ли равные векторы среди векторов, начала и концы которых находятся в данных точках? б) Чему равна длина каждого из них?

33.10. От точки A отложили вектор $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$. Каковы координаты точки B, если: а) $A(0, 0, 0)$, $\vec{a}(-1, 1, 2)$; б) $A(-1, 1, -1)$, $\vec{a}(0, 0, 1)$; в) $A(-2, 1, 0)$, $\vec{a}(2, -1, 3)$; г) $A(-4, -3, 1)$, $\vec{a}(4, 3, -1)$; д) $A(a, b, c)$, $\vec{a}(-a, -b, -c)$?

33.11. Вернитесь к задаче 33.9. Какие координаты имеют векторы: а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}$; в) $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{DA}$; г) $2\overrightarrow{AD}-3\overrightarrow{CA}$; д) $\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}-2\overrightarrow{DB}$; е) $-2\overrightarrow{DB}-2\overrightarrow{CB}-2\overrightarrow{AB}$?
Чему равны длины этих векторов?

33.12. Вектор $\vec{a}$ с координатами (x, y, z) имеет длину 1. а) Какая связь между его координатами? б) Пусть координаты x и y известны. Как вычислить координату z?

33.13. Пусть известны координаты вектора $\vec{a}$. Как вычислить углы, которые он образует с осями координат? с плоскостями координат? Приведите численные примеры.

33.14. Даны точки $A(-2, 1, 1)$, $B(1, 1, -2)$, $C(1, 1, -2)$, $D(1, 2, 3)$. Есть ли среди прямых, проходящих через эти точки, параллельные?

Задачи к п. 33.3

Основная задача

33.15. Даны длины трех ребер параллелепипеда, выходящих из одной точки, и углы между ними. Найдите длину диагонали параллелепипеда, выходящей из той же точки.

* * *

33.16. Пусть $\vec{a}(-1, 2, -3)$, $\vec{b}(2, -1, 0)$. Вычислите: а) $\vec{a}\cdot\vec{b}$;

б) $(-2\vec{a})\cdot\vec{b}$; в) $\vec{a}\cdot\frac{1}{2}\vec{b}$; г) $(-3\vec{a})\cdot(2\vec{b})$; д) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}$; е) $(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}+\vec{a})$;

ж) $(-4\vec{a}+\vec{b})\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{a}-2\vec{b}\right)$.

33.17. Пусть $\vec{a}(1, -2, 0)$, $\vec{b}(0, 2, -1)$. Вычислите: а) $|\vec{a}|$; б) $|\vec{b}|$; в) $|2\vec{a}|$; г) $\left|-\frac{1}{2}\vec{b}\right|$; д) $|\vec{a}+\vec{b}|$; е) $|2\vec{a}-\vec{b}|$.

33.18. Пусть $\vec{a}(0, 1, -2)$, $\vec{b}(-2, 1, -1)$. Вычислите угол между: а) $\vec{a}$ и $\vec{b}$; б) $(-2\vec{a})$ и $3\vec{b}$; в) $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{b}$; г) $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$.

33.19. а) Пусть $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ и $\vec{a}\perp\vec{b}$. Какая связь между координатами $\vec{a}$ и $\vec{b}$? б) Пусть $\vec{a}(1, -2, -3)$, $\vec{b}(3, 1, -2)$. Перпендикулярны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$?

33.20. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ единичные (имеют длину, равную единице). $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})=30°$, $(\widehat{\vec{b}, \vec{c}})=45°$, $(\widehat{\vec{c}, \vec{a}})=60°$. Вычислите:

а) $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{b}\cdot\vec{c}$, $\vec{c}\cdot\vec{a}$; б) $2\vec{a}\cdot\vec{b}$; в) $\frac{1}{2}\vec{b}\cdot4\vec{c}$; г) $\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c})$; д) $(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{a}$;

е) $(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{c})$; ж) $(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})\cdot(\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})$; з) $(2\vec{a}-3\vec{b})\cdot\frac{1}{2}\vec{c}$;

и) $\left(3\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}\right)\cdot(\vec{b}+2\vec{c})$; к) $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2$.

33.21. Пусть $PABC$ — правильный тетраэдр с ребром 1. Вычислите: а) $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$; б) $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{AC}$; в) $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{BC}$; г) $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{BK}$, где точка K — центр грани APC; д) $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{LM}$, где точка L — середина отрезка AC, а точка M — середина отрезка PB.

33.22. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб с ребром 1. Вычислите произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и: а) $\overrightarrow{C_1D_1}$; б) $\overrightarrow{D_1D}$; в) $\overrightarrow{DC_1}$; г) $\overrightarrow{B_1D_1}$; д) $\overrightarrow{B_1C}$; е) $\overrightarrow{A_1C}$; ж) $\overrightarrow{B_1D}$.

33.23. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Вычислите угол между: а) $\overrightarrow{B_1D_1}$ и $\overrightarrow{DC}$; б) $\overrightarrow{B_1C}$ и $\overrightarrow{CD_1}$; в) $\overrightarrow{B_1C}$ и $\overrightarrow{B_1A}$; г) $\overrightarrow{B_1D}$ и $\overrightarrow{A_1C}$; д) $\overrightarrow{A_1C}$ и $\overrightarrow{BD}$; е) $\overrightarrow{AD_1}$ и $\overrightarrow{DC_1}$.

33.24. Докажите, что для любых точек A, B, C, D выполняется равенство $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$. Какие следствия вы можете получить из этого равенства для правильной треугольной пирамиды?

33.25. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1 точка X лежит на A_1D, причем $DX:XA_1=1:2$, точка Y лежит на D_1C, причем $D_1Y:YC=1:2$. Вычислите $|XY|$ и угол между (XY) и: а) (A_1D); б) (AD); в) (AC_1).

33.26. В правильном тетраэдре $PABC$ с ребром 1 точка X лежит на ребре PA и $PX:XA=1:2$, точка Y лежит на ребре BC и $CY:YB=1:2$. Вычислите $|XY|$ и углы, которые (XY) образует с: а) (PA); б) (PC).

33.27. Докажите, что равносильны два утверждения:

$$(AB)\perp(CD) \text{ и } AC^2+BD^2=AD^2+BC^2.$$

33.28. Прямые a, b, c — три попарно пересекающиеся прямые одной плоскости. Прямая x образует с каждой из них один и тот же угол. Как она расположена по отношению к данной плоскости?

33.29. Докажите, что: а) существует общий перпендикуляр к двум скрещивающимся прямым; б) его длина равна расстоянию между ними.

Задачи к п. 33.4

33.30. а) Установите положение относительно плоскости $2x-y-z-3=0$ точек $A(1, 0, 0)$, $B(0, 0, -3)$, $C(3, -2, 1)$. б) Уравнение плоскости $Ax+By+Cz=0$. Объясните, почему эта плоскость проходит через начало координат.

33.31. В какой точке плоскость $2x+y-3z=1$ пересекает каждую из осей координат?

33.32. Нарисуйте плоскость, уравнение которой:
а) $x+y+z=1$; б) $-x-y+z=2$; в) $2x-y+3z+1=0$; г) $-3x+2y-4z=5$.

33.33. Напишите уравнение прямой, по которой плоскость $x-y+z=2$ пересекает: а) (xy); б) (yz); в) (xz).

33.34. Как будет расположена плоскость относительно осей координат, если в ее уравнении будет равен нулю ровно один коэффициент? ровно два коэффициента? Какая получится фигура, если в уравнении $Ax+By+Cz+D=0$: а) $A=B=C=0$, $D\neq 0$; б) $A=B=C=D=0$?

33.35. 1) Пересекаются ли плоскости:
а) $x+y+z=1$, $x+y+z=-1$;
б) $x+y+z=1$. $x+y-z=1$;
в) $x+2y+3z=1$, $3x+y+2z=1$;
г) $-7x+y+2z=0$, $7x-y-z=0$;
д) $x-y+z=3$, $2x-2y+2z=4$;
е) $x-y=1$, $-x-y+z=2$?
2) Имеют ли общую точку плоскости:
а) $x-y+z=1$, $x+y-z=1$, $-x+y+z=1$;
б) $2x-y+3z=1$, $4x+2y-z=2$, $-3x+4y-2z=-1$;
в) $px+y+z=1$, $x+py+z=1$, $x+y+pz=1$?
3) Каково условие параллельности двух плоскостей, заданных своими уравнениями?

33.36. Две плоскости заданы уравнениями. Как выяснить, будут ли они перпендикулярны? Если они не перпендикулярны, то как вычислить угол между ними? Приведите примеры.

33.37. Две плоскости, заданные уравнениями, параллельны. Как вычислить расстояние между ними? Приведите примеры.

33.38. Какую фигуру в пространстве задает неравенство
$$Ax+By+Cz+D\geqslant 0 \ (\leqslant 0)?$$

33.39. Какая фигура в пространстве задана такими условиями: а) $|x| \leqslant 1$; б) $-1 \leqslant x-y \leqslant 2$; в) $10 \leqslant x+y+z \leqslant 20$; г) $1 \leqslant x \leqslant 2$, $-2 \leqslant y \leqslant -1$, $-1 \leqslant z \leqslant 1$; д) $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, $x+y+z \leqslant 1$?

33.40. Как можно задать в системе координат: а) куб; б) правильную треугольную призму; в) правильный тетраэдр; г) правильную четырехугольную пирамиду? Приведите примеры.

▲ § 34. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Мы уже говорили о преобразованиях в пространстве, изучая симметрию тел. В этом параграфе речь пойдет о самых общих свойствах важнейших преобразований пространства — движений и подобий.

34.1. Параллельный перенос

Параллельным переносом или, короче, **переносом** фигуры называется такое ее преобразование, при котором все ее точки перемещаются на один и тот же вектор, т. е. на одно и то же расстояние в одном и том же направлении (рис. 322). Таким образом, при переносе каждым двум точкам X и Y фигуры сопоставляются такие точки X', Y', что

$$\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{YY'}. \qquad (1)$$

Параллельный перенос фигуры задается переносом одной ее точки: если указано, что точка A переходит в A', то для любой другой точки X в силу (1) $\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{AA'}$. Перенос задается вектором $\vec{a} = \overrightarrow{AA'}$.

Т е о р е м а. ***Параллельный перенос сохраняет расстояния и направления, т. е. каждым двум точкам X, Y сопоставляются такие точки X', Y', что***

$$\overrightarrow{X'Y'} = \overrightarrow{XY}. \qquad (2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$\overrightarrow{X'Y'} = \overrightarrow{X'X} + \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YY'} = -\overrightarrow{XX'} + \overrightarrow{YY'} + \overrightarrow{XY}$.

Так как по (1) $\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{YY'}$, то оказывается $\overrightarrow{X'Y'} = \overrightarrow{XY}$. ■

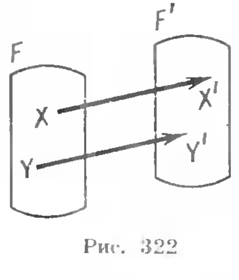


Рис. 322

Справедливо также обратное утверждение: *если преобразование сохраняет расстояние и направление, то оно есть параллельный перенос.*

Для доказательства достаточно взять равенство $\overrightarrow{X'Y'}=\overrightarrow{XY}$ и проделать выкладку, аналогичную предыдущей.

По определению преобразование, сохраняющее расстояние, есть движение. Поэтому *параллельный перенос — это движение, сохраняющее направления.*

Когда предмет перемещают, двигая его прямо, то и происходит перемещение, а соответствие между его прежним и новым положением представляет перенос в геометрическом смысле.

Докажем, что в координатах параллельный перенос задается формулами

$$x'=x+a,\ y'=y+b,\ z'=z+c. \qquad (3)$$

Эти формулы выражают координаты x', y', z' той точки, в которую перешла точка (x, y, z). Числа a, b, c — это постоянные координаты вектора переноса.

Действительно, пусть при переносе точка A перешла в A', причем координаты вектора $\overrightarrow{AA'}$ равны a, b, c. Любая точка $X(x, y, z)$ переходит в такую точку $X'(x', y', z')$, что

$$\overrightarrow{XX'}=\overrightarrow{AA'}. \qquad (4)$$

Равенство векторов означает равенство их координат, так что

$$x'-x=a,\ y'-y=b,\ z'-z=c. \qquad (5)$$

Из этих равенств и следуют формулы (3).

Очевидно, верно и обратное. Если преобразование задано формулами (3), то из них следуют формулы (5). А это значит, что векторы $\overrightarrow{XX'}$ — одни и те же для всех точек X, так что преобразование, заданное равенствами (3), есть перенос.

34.2. Гомотетия

Гомотетией с центром O и коэффициентом λ ($\lambda\neq 0$) называется преобразование, при котором любая точка X переходит в такую точку X', что

$$\overrightarrow{OX'}=\lambda\overrightarrow{OX} \qquad (6)$$

(рис. 323). Покажем, что при гомотетии все векторы умножаются на ее коэффициент λ, т. е. если точки X, Y переходят в X', Y', то

$$\overrightarrow{X'Y'}=\lambda\overrightarrow{XY}. \qquad (7)$$

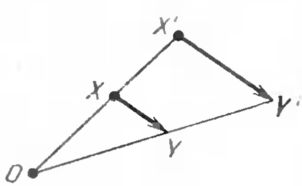


Рис. 323

Действительно, используя (6), получаем:

$$\overrightarrow{X'Y'}=\overrightarrow{OY'}-\overrightarrow{OX'}=$$
$$=\lambda\overrightarrow{OY}-\lambda\overrightarrow{OX}=\lambda(\overrightarrow{OY}-\overrightarrow{OX})=\lambda\overrightarrow{XY},$$

т. е.

$$\overrightarrow{X'Y'} = \lambda \overrightarrow{XY}.$$

Отсюда следует, во-первых, что все расстояния при гомотетии изменяются в $|\lambda|$ раз, так как из (7)

$$|X'Y'| = |\overrightarrow{X'Y'}| = |\lambda| \; |\overrightarrow{XY}| = \lambda \; |XY|.$$

Следовательно, *гомотетия есть преобразование подобия.*

Если $\lambda > 0$, то направления сохраняются, а при $\lambda < 0$ изменяются на противоположные. При $k = -1$ гомотетия оказывается симметрией относительно точки O (при $k = 1$ гомотетия сводится к тождественному преобразованию).

34.3. Поворот вокруг прямой

Поворот вокруг прямой в пространстве мы определили, изучая симметрию правильной призмы. Ясно, что поворот является движением. Сейчас мы это докажем.

Теорема *(о повороте).* ***Поворот вокруг прямой является движением.***

Доказательство. Пусть при повороте вокруг оси a точки A и B перешли в точки A' и B'. Докажем, что $A'B' = AB$.

Если точки A и B лежат в одной плоскости, перпендикулярной оси, то $A'B' = AB$, так как поворот в плоскости сохраняет расстояния.

Допустим, что точка A лежит в плоскости $\alpha \perp a$, а точка B — в другой плоскости $\beta \perp a$ (рис. 324). Точки A' и B' лежат в тех же плоскостях α и β. Поэтому если BC и $B'C'$ — перпендикуляры, опущенные из точек B и B' на плоскость α, то по лемме п. 14.2 $B'C' = BC$. При повороте ограниченная осью полуплоскость, проходящая через точку B, переходит в полуплоскость, проходящую через B'. Поэтому точка C переходит в точку C'. Эти точки лежат в той же плоскости, где лежат точки A и A'. Поэтому $A'C' = AC$.

Наконец, мы замечаем еще, что так как $BC \perp \alpha$ и $B'C' \perp \alpha$, то $BC \perp CA$ и $B'C' \perp C'A'$. Поэтому треугольники ABC и $A'B'C'$ прямоугольные. Они равны, так как $B'C' = BC$, $A'C' = AC$. Следовательно, $A'B' = AB$. ∎

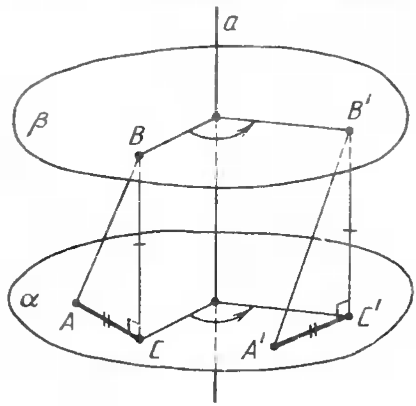


Рис. 324

34.4. Основная теорема о движениях

Мы познакомились с четырьмя видами движений — это, во-первых, симметрия относительно точки, во-вторых, отражение в плоскости, в-третьих, поворот вокруг прямой и, наконец, параллельный перенос.

Используя эти виды движений, определим еще три вида движений.

1) **Винтовое движение** — оно состоит в последовательно выполненных поворотах вокруг прямой — «оси винта» и переносе вдоль этой прямой (рис. 325). Порядок выполнения поворота и переноса здесь безразличен.

2) **Зеркальный поворот** — он уже был определен в п. 24.2 и представляет собой последовательно выполненные повороты вокруг прямой и отражение в плоскости, перпендикулярной этой прямой (рис. 326).

3) **Скользящее отражение** — оно представляет собой последовательно выполненные отражение в плоскости и параллельный перенос вдоль этой плоскости (т. е. на вектор, параллельный этой плоскости) (рис. 327).

К винтовым движениям можно причислить повороты в качестве винтовых движений с нулевым переносом, а также переносы как винтовые движения с нулевым поворотом.

К скользящим отражениям относятся отражения как скользящие отражения с нулевым переносом.

Справедлива следующая теорема:

Теорема. ***Всякое движение есть одно из трех — либо винтовое движение, либо зеркальный поворот, либо скользящее отражение.*** (В частности, центральная симметрия есть не что иное, как зеркальный поворот на 180°. Объясните почему.)

Движение, которое соответствует реальному механическому перемещению, можно осуществить непрерывно, но для движения, содержащего отражение, этого сделать нельзя. Поэтому из сформулированной теоремы следует: движение, которое можно

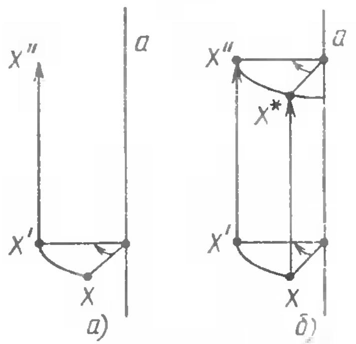


Рис. 325

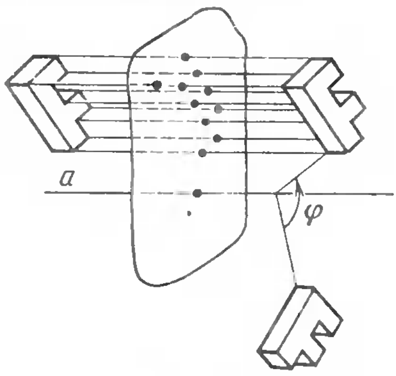


Рис. 326

осуществить непрерывно, сводится к винтовому движению. Итак, образно говоря, как ни крутить, ни переносить, ни поворачивать предмет, а конечное его положение всегда будет таким, что в него предмет можно перевести винтовым движением. Винтовое движение можно осуществить непрерывно, равномерно поворачивая предмет вокруг оси и перенося его вдоль нее.

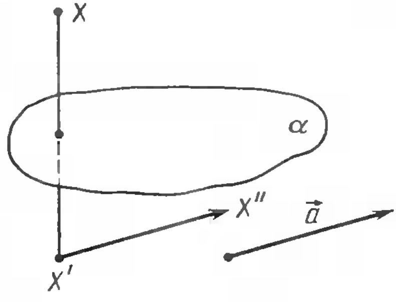


Рис. 327

Теорема. ***Всякое движение может быть осуществлено не более чем четырьмя отражениями, винтовое движение — четырьмя, зеркальный поворот и скользящее отражение — тремя: если винтовое движение сводится к повороту или переносу, то оно осуществляется двумя отражениями; скользящее отражение и зеркальный поворот могут сводиться к одному отражению.***

34.5. Подобие

Подобием называется преобразование, при котором все расстояния изменяются в одно и то же число раз. Это число (положительное) называется **коэффициентом подобия.**

Движение есть не что иное, как преобразование подобия с коэффициентом, равным единице. Другим примером подобного преобразования служит гомотетия. В этом случае коэффициент подобия равен модулю коэффициента гомотетии.

Из определений движения, подобия и гомотетии следует, что любое подобное преобразование можно осуществить так: сначала выполнить гомотетию (с любым центром), коэффициент которой равен коэффициенту данного подобия, а затем произвести движение (рис. 328).

Подобие сохраняет углы. Это свойство подобия доказывается так же, как в планиметрии, и основано на подобии треугольников, стороны которых пропорциональны.

Площади фигур при подобии с коэффициентом k изменяются, как и в планиметрии, в k^2 раз.

При подобии с коэффициентом k объемы фигур изменяются в k^3 раз. Это следует из формул, полученных для объема в главе V. ▼

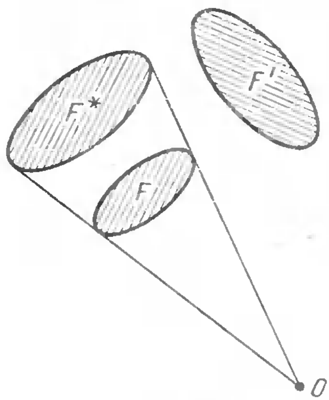


Рис. 328

ГЛАВА VII*.

ОСНОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ. СОВРЕМЕННАЯ ГЕОМЕТРИЯ

§ 35. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

35.1. Постановка вопроса

В геометрии все утверждения — теоремы должны доказываться путем логических рассуждений на основании принятых аксиом и уже доказанных теорем.

Для того чтобы вести логические рассуждения без ссылок на очевидность или на чертеж, нужно иметь точные определения употребляемых понятий. Однако в ряде случаев мы все-таки пользовались не входящими в аксиомы понятиями без их строгого определения, имея в виду их очевидность.

Например, в стереометрии использовались понятия геометрического тела и его поверхности без всякого определения. Подразумевалось, что у каждого есть о них достаточно верное представление.

В этой главе дадим точные определения указанных понятий, чтобы показать, как можно выразить наглядные представления в точных определениях, обеспечивающих возможность строгих логических выводов.

Кроме основных понятий точки и расстояния, будем пользоваться понятием фигуры как множества точек. Так принято в современной математике. (Об этом уже говорилось в главе IV.)

35.2. Граница и внутренность

Точные определения границы фигуры и ее внутренности вполне соответствуют наглядному представлению. На рисунке 329 точка A лежит на границе фигуры F, а точка B — внутри. То, что точка A лежит на границе, означает, что сколь угодно близко к ней есть, кроме точек самой фигуры, также и внешние точки. Точки же, лежащие внутри фигуры, отдалены от внешних хоть немного, как, например, точки B, C.

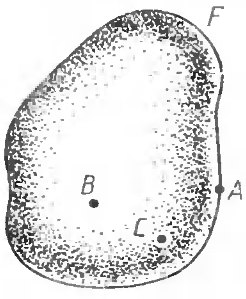


Рис. 329

Выразим теперь это в точных определениях.

Точка называется **граничной** для данной фигуры, если сколь угодно близко от нее есть точки, как принадлежащие фигуре, так и не принадлежащие ей (рис. 330). Выражение «сколь угодно близко» означает «на сколь угодно малом расстоянии».

Множество граничных точек фигуры называется ее **границей.**

Точка фигуры, не лежащая на ее границе, т. е. не являющаяся ее граничной точкой, называется **внутренней точкой фигуры.**

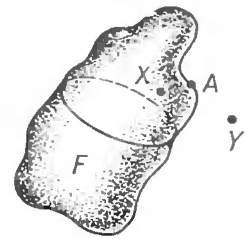


Рис. 330

Множество внутренних точек фигуры называется ее **внутренностью.** Она получается, если из фигуры исключены все ее граничные точки — вся граница. Например, сфера радиусом R с центром O является границей шара радиусом R с центром O. Множество точек X, для которых $OX < R$, является его внутренностью.

Граница фигуры может принадлежать ей, а может и не принадлежать или принадлежать лишь отчасти, как, скажем, у куба с одной или со всеми исключенными гранями.

Точки, которые не являются ни внутренними, ни граничными для фигуры, называются **внешними** для нее точками.

Данные общие определения относятся не только к стереометрии, но также и к планиметрии. В планиметрии точка называется граничной для данной фигуры, если сколь угодно близко от нее есть точки плоскости, как принадлежащие фигуре, так и не принадлежащие ей. Внутренние точки фигуры — это те ее точки, вблизи которых нет точек плоскости, не принадлежащих фигуре. Например, окружность круга — это его граница на плоскости, и, исключая ее, получаем внутренность круга на плоскости.

В стереометрии фигура рассматривается в пространстве. Граничные точки фигуры — это те, сколь угодно близко к которым есть точки пространства, как принадлежащие фигуре, так и не принадлежащие ей.

Поэтому если плоская фигура рассматривается как фигура в пространстве, то, очевидно, сколь угодно близко к любым ее точкам есть точки пространства, ей не принадлежащие,— точки вне плоскости фигуры. Как фигура в пространстве, она сплошь состоит из граничных точек.

Следовательно, понятия границы и внутренности относительны: говоря о внутренних точках или о границе, нужно иметь в виду, относительно чего они берутся. Так, например, можно говорить о внутренних и граничных точках фигуры на сфере относительно сферы и т. п.

На плоскости точки, расположенные от данной точки A не более чем на данное расстояние r, образуют круг с центром в точке A. В пространстве же такие точки образуют шар. По-

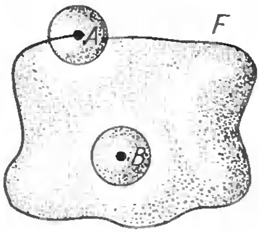


Рис. 331

этому внутренние и граничные точки фигуры можно характеризовать следующим образом.

В пространстве точка A является граничной точкой фигуры F, если во всяком шаре с центром A (как бы мал он ни был) содержатся точки, как принадлежащие фигуре, так и не принадлежащие ей. Точка B является внутренней точкой фигуры, если есть шар с центром B, который целиком содержится в фигуре, т. е. не содержит точек, не принадлежащих фигуре (рис. 331).

На плоскости граничные и внутренние точки характеризуются так же, только вместо шара берется круг.

35.3. Граница ограничивает

Мы говорим, что **фигура F ограничивает фигуру G**, если F служит границей G и G содержит внутренние точки. Это определение относится как к стереометрии, так и к планиметрии.

Фигура F, ограничивающая фигуру G, может включаться в нее, а может и не включаться. Например, сфера ограничивает как шар, так и его внутренность.

Фигура F ограничивает G еще в том смысле, что нельзя выйти из G, не пересекая F: граница отделяет ее внутренность от внешних точек. Именно: *всякая ломаная, соединяющая внутреннюю точку фигуры с внешней точкой, пересекает границу фигуры* — имеет с ней хотя бы одну общую точку (рис. 332). Эту теорему доказывать не будем.

35.4. Определение тела и замкнутой области

Теперь можно дать точное определение того, что называют в геометрии телом.

Телом называется ограниченная фигура в пространстве, обладающая двумя свойствами:

1) у нее есть внутренние точки и любые две из них можно соединить ломаной (или отрезком) внутри фигуры;

2) фигура содержит свою границу и ее граница совпадает с границей ее внутренности.

Это определение вполне отвечает наглядному представлению. Очевидно, тело, как мы его себе представляем, имеет внутренние точки и не распадается на части, хотя бы и прилегающие кое-где друг к другу. Так, кубы на рисунке 333, a — это два тела, а не одно. Это и есть первое условие

Рис. 332

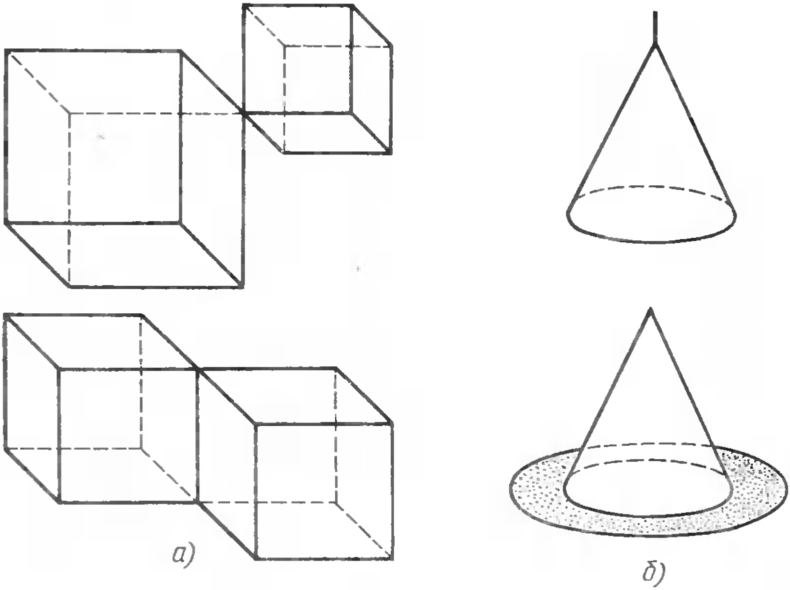


Рис. 333

определения. Второе условие означает, что поверхность — граница тела принадлежит ему и везде прилегает к его внутренности, так что у нее нет «отростков», а если и есть, то они не относятся к телу. Поэтому конус со шпилем или с «полями», как у шляпы (рис. 333, *б*), не считается телом.

Граница тела называется его **поверхностью.**

Замкнутой областью или **участком** называется ограниченная фигура на плоскости, обладающая двумя свойствами:

1) у нее есть внутренние точки и любые две из них можно соединить ломаной (или отрезком) внутри фигуры;

2) фигура содержит свою границу и ее граница совпадает с границей ее внутренности.

Разница с определением тела в том, что там граница и внутренность понимаются относительно пространства, а здесь относительно плоскости.

Примеры тел. 1. Как уже говорилось, шар представляет собой тело и его поверхностью служит сфера. Обоснуйте это, исходя из общих определений тела и его поверхности.

2. На вопрос, когда цилиндр и конус являются телами, отвечает следующая теорема: *цилиндр и конус являются телами тогда и только тогда, когда их основаниями являются замкнутые области.* В этом случае боковая поверхность цилиндра, как и конуса, состоит из образующих, концы которых лежат на границе основания. Вся поверхность слагается из боковой поверхности и оснований.

Простейшие примеры к этой теореме — это цилиндр и конус вращения. Объясните, что означает сформулированная теорема, опираясь на определение тела и его поверхности. После этого попробуйте ее доказать.

Сформулируйте соответствующую теорему для усеченного конуса.

§ 36. ОБ АКСИОМАХ

36.1. Основные понятия

При строгом изложении геометрии, как и любой другой науки, каждое вводимое понятие должно быть определено.

Определение понятия состоит в том, что его смысл разъясняется посредством других понятий, которые считаются известными, но те, в свою очередь, тоже нуждаются в определении, и т. д. Так продолжаться до бесконечности не может. Необходимо иметь основные исходные понятия, которые уже не определяются путем сведения их к другим понятиям, но которые сами служат для определения других понятий.

Такими основными понятиями с самого начала были понятия точки, отрезка (или прямой), геометрической фигуры. Никакого определения им не было дано, а были даны только пояснения со ссылками на рисунки.

Исходя из наглядных представлений, можно определить точку, отрезок и фигуру примерно так.

Точкой называется предельно точно отмеченное место — «здесь», в котором уже нельзя различить «здесь» и «там». В «Началах» Евклида было дано такое определение: «Точка — то, что не имеет частей».

Отрезком называется мысленный образ натянутой нити без всякой толщины, а прямой — бесконечной натянутой нити.

Фигурой называется мысленный образ предмета, в котором отвлекаются от всех его свойств, кроме формы и размеров, считая их абсолютно точными.

Отвлекаться можно также от некоторых размеров: например, отрезок (или прямая) мыслится без ширины и толщины, а точка — без всяких размеров вообще.

Однако приведенные определения не математические. Они говорят, скорее, о происхождении понятий точки, прямой и фигуры, но не дают основания для точных логических выводов без ссылок на наглядные представления.

36.2. Определения основных понятий

Строго теоретическое изучение какого-либо предмета начинается с его определения. Например, изучение окружности начинается с ее определения, т. е. с указания определяющего ее свойства. На основании этого свойства устанавливаются другие свойства окружности, выражаемые в теоремах. При этом, естественно, используются понятия, которые уже известны.

Точно так же строится изучение геометрии плоскости и пространства. В формулировках их основных определяющих свойств считаются известными два общематических понятия: множество и действительное число.

Изучение пространства, составляющее предмет стереометрии, можно начать таким определением:

Пространство в элементарной геометрии[1] — это множество, элементы которого называются точками и в котором выполняются следующие пять аксиом... А затем сформулировать те пять аксиом, которые даны в § 1.

Итак, пространство — это множество, в котором выполняются аксиомы стереометрии. Элементы этого множества называются точками.

Последняя фраза представляет собой не что иное, как определение точки в стереометрии: **точкой** называется элемент того множества, которое представляет пространство.

Далее можно дать определения и других основных объектов стереометрии.

Фигурой называется множество точек.

Плоскостью в пространстве называется фигура, на которой выполняется планиметрия и которая вместе с другими такими же фигурами удовлетворяет аксиомам стереометрии. (Сказать только то, что на плоскости выполняется планиметрия, недостаточно, так как существенно еще взаимное расположение плоскостей, выраженное в аксиоме о том, что если две плоскости имеют общую точку, то их пересечение есть их общая прямая.)

Прямой называется такая фигура, содержащаяся в плоскости, для которой вместе с другими такими фигурами выполняются аксиомы планиметрии.

Расстоянием называется действительное число, относимое каждым двум точкам так, что на плоскостях выполняются аксиомы планиметрии и в пространстве — аксиома расстояний; это число определено, когда указана пара точек, которым отнесено расстояние, равное единице (что равносильно указанию единицы длины).

Аналогично можно определить предмет планиметрии: **плоскость — это множество, элементы которого называются точками и в котором выполняются следующие аксиомы...** И дальше сформулировать эти аксиомы.

П о я с н е н и е. В обоих случаях — и в стереометрии, и в планиметрии — определили точку не саму по себе, а совместно

[1] Мы говорим о «пространстве в элементарной геометрии» потому, что термин «пространство» употребляется и в других смыслах (см. § 39).

с другими точками, как элемент образуемого ими множества с его структурой, описанной аксиомами. Такие определения встречаются постоянно не только в математике. На вопрос: «Кто такой комсомолец?» — можно ответить: «Член ВЛКСМ», т. е. элемент множества комсомольцев, объединенных Уставом. Так и точка — это элемент пространства с «уставом», выраженным в аксиомах.

Точно так же прямая или плоскость — это множество точек, удовлетворяющих вместе с другими такими множествами перечисленным аксиомам. Так же как, скажем, класс — это множество учащихся, входящее определенным образом в структуру школы. Для всякой «организации» определения возможны только через взаимные отношения ее элементов и частей, в частности для такой «организации», как пространство.

Такие определения, когда какие-либо понятия определяются не по отдельности, а через взаимные отношения, можно называть соотносительными.

Заметим еще, что каждое из основных понятий планиметрии или стереометрии определяется не только теми аксиомами, в которых оно явно фигурирует. Так, прямая участвует во всех аксиомах либо явно, либо через понятия отрезка и полупрямой.

Словом, аксиомы должны учитываться все вместе, поэтому их совокупность называют системой аксиом.

36.3. Условность аксиом

Одному и тому же предмету можно давать разные определения, беря за исходные разные его свойства, лишь бы они были равносильны.

Например, вместо обычного определения окружности можно принять такое: окружность есть множество вершин прямоугольных треугольников с общей гипотенузой, лежащих в одной плоскости. Возможно еще много других определений. Выбор определения зависит от того, какое из них проще, естественнее или лучше ведет к дальнейшим выводам.

Точно так же в основании стереометрии, в определении ее предмета, как и всякой другой теории, можно принимать разные системы аксиом, лишь бы они были равносильны. Выбор тех или иных аксиом диктуется соображениями простоты и наглядности, легкостью получения дальнейших выводов и др. Например, аксиомы 3 и 5 можно было вывести из остальных, тогда они превратились бы в теоремы. Система из трех аксиом 1, 2, 4 проще, но зато нужные выводы получаются из нее сложнее.

Так, каждая из четырех доказанных в § 2 теорем фигурирует в качестве аксиомы при других изложениях стереометрии.

Возьмем, например, утверждение: *через каждые две пересекающиеся прямые проходит плоскость и притом только одна.*

Это ни теорема, ни аксиома, а просто верное утверждение стереометрии; оно становится аксиомой или теоремой в зависимости от сделанного выбора. У нас это теорема, в другом изложении может быть аксиомой.

Основные понятия тоже можно выбирать по-разному. Например, вместо отрезка можно принять за основную фигуру прямую.

Таким образом, выбор основных понятий и аксиом — дело условия: одно и то же утверждение теории может быть по выбору принято за аксиому, а может выступать в качестве теоремы, когда приняты другие аксиомы; одно и то же понятие может быть принято как основное, а может определяться через другие.

Само слово «аксиома» по происхождению греческое и означает в переводе «достойное признания». В обычной речи аксиомой и называют утверждение, достойное признания ввиду его очевидности, несомненности и т. п. Словом, в обычном понимании аксиома — это нечто безусловное. Но в математике аксиомы, как мы видим, условны. Они «достойны признания» не сами по себе, а потому, что на них строится достойная — содержательная, важная теория.

При условности аксиом сама стереометрия — совокупность ее утверждений с их логическими связями — не зависит от каких-либо условий. Так, достопримечательности города с системой улиц и сообщений между ними существуют независимо от выбора туриста. Но турист может выбирать тот или иной исходный пункт, чтобы пройти по всем достопримечательностям. Так и мы, выбрав исходный пункт — нашу систему аксиом, шли по логическим доказательствам, как по улицам, знакомясь с достопримечательностями стереометрии.

36.4. Аксиоматический подход

Система аксиом теории дает определение ее предмета и основных понятий. Эти определения называются аксиоматическими, чтобы отличить их от обычных определений.

В обычном определении используются только такие понятия, которые уже известны. В аксиоматическом же определении фигурируют такие понятия, которые определяются только самими аксиомами. Например, отрезки — это множества, обладающие свойствами, указанными в аксиомах, явно или неявно. В аксиомах фигурируют также понятия, считающиеся заранее известными: «множество», «существуют» и др., но они не характерны для данной теории, а имеют более широкое значение.

Подводя итог, можно сказать следующее об аксиомах.

Аксиома — это утверждение, входящее в систему аксиом, т. е. в совокупность утверждений, которые все вместе образуют определение предмета теории и ее основных понятий и тем самым служат основанием для получения других утверждений — **теорем** путем логических выводов.

Основными называются понятия теории, определения которых даются самими аксиомами.

Всякая теория допускает разные системы аксиом и основных понятий. При замене одной аксиомы другой первая превращается в теорему, а заменившее ее утверждение становится из теоремы аксиомой.

При строгом изложении аксиоматики, т. е. аксиоматических основ теории, сначала дается перечисление терминов, обозначающих основные понятия, а затем формулируются в определенной последовательности аксиомы (так, чтобы каждое используемое далее понятие было бы введено раньше).

В общем, аксиомы стереометрии, как и планиметрии, имеют двоякий смысл: абстрактных определений и наглядных описаний. Так же все теоремы стереометрии и планиметрии имеют двойной смысл: абстрактно логический и наглядно практический.

Всякое предложение геометрии нужно так и понимать двояко: в его наглядном практическом содержании и как чисто логическое следствие аксиом. Это можно видеть на всем предыдущем изложении.

Такое соединение в одном предмете двух противоположных и вместе с тем неразрывно связанных аспектов, или «сторон», называется единством противоположностей. Понимание такого аспекта в его существенном значении составляет ядро того, что называется диалектикой. Без реального практического содержания геометрия не имела бы смысла, но без аксиоматической строгости не была бы точной теорией. Обе стороны ей необходимы.

З а м е ч а н и е. Раз выбор аксиом — дело условия и мы приняли за аксиомы 3, 5 утверждения, которые можно доказать из других аксиом, то возникает вопрос: нельзя ли все теоремы принять как аксиомы? Добавляя к аксиомам новые утверждения, нужно убедиться, что от этого не возникает противоречия. Оно возникнет, если прибавить неверное утверждение. Поэтому все равно надо доказывать, что вводимое утверждение не противоречит уже принятым аксиомам. А это и значит, что надо доказывать это утверждение как теорему.

36.5. Вывод двух аксиом из других

Примем определение плоскости как фигуры, на которой выполняется планиметрия, а также примем аксиомы стереометрии 1, 2, т. е. аксиому плоскости и аксиому пересечения плоскостей. Тогда сказанное в аксиомах 3 и 5 может быть доказано.

Т е о р е м а 1. ***Если прямая проходит через две точки данной плоскости, то она лежит в этой плоскости.***

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть прямая a имеет с плоскостью

α две общие точки A, B. Прямая a лежит в некоторой плоскости β, поскольку, введя прямые в стереометрии, мы ввели их как прямые в плоскостях. Если плоскость β совпадает с α, то сказанное в теореме выполняется. Допустим, β отлична от α. Тогда по аксиоме пересечения плоскостей плоскости α и β пересекаются по прямой, содержащей точки A и B. Но в плоскости β по аксиоме планиметрии есть только одна прямая, проходящая через точки A, B, — это прямая a. Поэтому она является и прямой, по которой β пересекается с α, т. е. прямая a лежит в плоскости α. ■

Теорема 2. ***Всякая плоскость α ограничивает два полупространства — две такие фигуры, что если точки A, B, не лежащие в α, принадлежат одной из этих фигур, то отрезок AB не пересекает α, если же разным, то пересекает.***

Доказательство. Пусть дана плоскость α. Возьмем какую-нибудь не принадлежащую ей точку O. Пусть P — множество таких точек X, что отрезок OX не имеет с α общих точек, а Q — множество всех других точек пространства, исключая точки самой плоскости α. Докажем, что это и будут полупространства без плоскости α, т. е. что для них выполняется сказанное о двух точках A, B.

Возьмем две любые точки A, B, не лежащие в плоскости α, и пусть β — плоскость, проходящая через точки O, A, B. Если α не пересекает β, то точки A, B заведомо принадлежат P вместе с O и отрезок AB не пересекает α.

Допустим, β пересекает α. Тогда эти плоскости пересекаются по некоторой прямой a. Она делит плоскость β на две полуплоскости: β_1, β_2 (за вычетом самой прямой a); пусть $O \in \beta_1$. Так как любая точка полуплоскости β_1 соединяется с O отрезком, не пересекающим прямую a, т. е. плоскость α, то β_1 лежит в P. Напротив, β_2 содержится в Q, так как всякий отрезок OX с концом $X \in Q$ пересекает a.

Отсюда ясно, что если A и B принадлежат P (или Q), то тем самым они принадлежат β_1 (или β_2) и отрезок AB не пересекает α. Если же точки A, B принадлежат одна P, другая Q, то тем самым они принадлежат β_1 и β_2 и отрезок AB пересекает α. ■

§ 37. СОВРЕМЕННАЯ ГЕОМЕТРИЯ

37.1. Коренное отличие современной геометрии

До середины прошлого века была одна геометрия — геометрия одного-единственного пространства. Она изучала фигуры в этом пространстве. Элементы этой геометрии мы изучаем в нашем курсе. Теперь же геометрия охватывает «геометрии» бесконечного множества разных воображаемых пространств, она изучает свойства самих пространств и фигур в них.

Что же представляют собой эти пространства, как их определяют, каков их реальный смысл?

Вспомним определение, данное в п. 36.2 «Пространством элементарной геометрии называется множество точек, удовлетворяющее сформулированным аксиомам». Точки — это элементы этого множества. Точно так же можно определить любое другое пространство: это множество каких-то элементов — «точек», удовлетворяющее соответствующим аксиомам. Какие берутся аксиомы, такое и определяется пространство. Название «пространство» указывает только на то, что оно по своим свойствам, которые определяются аксиомами, похоже на обычное пространство элементарной геометрии.

В отличие от всех прочих пространств то пространство, геометрию которого мы изучали, называют трехмерным евклидовым пространством. Наряду с ним мыслятся теперь и изучаются пространства любого числа измерений — евклидовы и неевклидовы (поверхности тоже можно считать пространствами — двумерными).

Если из аксиом, принятых нами в § 1 главы I, исключить аксиомы 2, 5, то оставшиеся определяют вообще евклидово пространство произвольного числа измерений. Фиксировать число измерений пространства можно условием: число измерений пространства равно n, если в нем существует n, и не больше, взаимно перпендикулярных прямых. Например, четырехмерное евклидово пространство — это множество точек, где выполняются наши аксиомы 1, 3, 4 и еще такая: существуют четыре, и не больше, взаимно перпендикулярные прямые (можно заметить, что тут выполняются все теоремы § 2 главы I: через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и поэтому перпендикулярность определяется как на плоскости).

Другой пример. **Метрическим пространством** называется множество, в котором каждой паре элементов (точек) X, Y отнесено число $|XY|$ с известными нам условиями:

1) $|XY|=0$ тогда и только тогда, когда $X=Y$;
2) $|XY|=|YX|$;
3) $|XY|+|YZ|\geqslant|XZ|$.

Это аксиомы метрического пространства.

Рассмотрим, например, любые непрерывные функции f, g на отрезке $[0, 1]$. Определим расстояние между двумя функциями:

$$|fg|=\max_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|.$$

Вы можете проверить, что все три аксиомы 1—3 выполняются. Следовательно, рассматриваемые функции с определенным таким образом расстоянием между ними образуют метрическое пространство — **пространство непрерывных функций.**

Итак, пространство в современной математике определяется как множество каких-либо элементов — «точек», наделенное той или иной структурой — теми или иными свойствами, по которым оно более или менее сходно с обычным пространством. Свойства его задаются теми или иными аксиомами.

Это общее понятие пространства сложилось в начале нашего века в итоге развития геометрии и математики в целом. Рассмотрим простейшие примеры пространств с их геометриями, их реальный смысл и значение.

37.2. Геометрия на поверхности

Планиметрия — это геометрия на плоскости, и, занимаясь ею, рассматривают плоскость саму по себе, отвлекаясь от окружающего пространства. Точно так же можно изучать геометрию на любой поверхности.

Представим себе какую-нибудь поверхность. Будем измерять расстояние между ее точками по самой поверхности — по кратчайшей линии от одной точки до другой (рис. 334). Такие линии играют на поверхности роль прямолинейных отрезков, их называют **кратчайшими.** Так мы определили расстояние между точками и отрезки — кратчайшие. Их можно обозначить, так же как в планиметрии, AB и т. п., а расстояния — $|AB|$ и т. п.

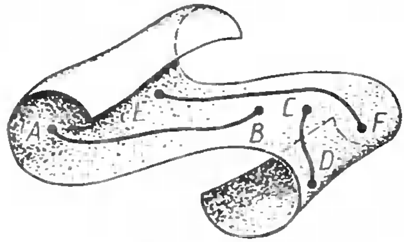


Рис. 334

Теперь можно, например, определить треугольник как фигуру из трех кратчайших AB, BC, AC (не имеющих других общих точек, кроме концов), или как часть поверхности, ограниченную такими кратчайшими (рис. 335).

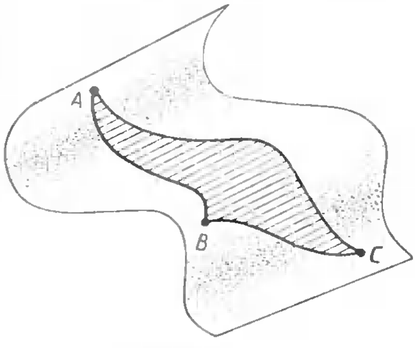


Рис. 335

Можно определить окружность: окружностью с центром O и радиусом r называется множество точек, удаленных от O на расстояние r,— совсем как на плоскости, только теперь имеются в виду точки данной поверхности и расстояния, измеренные на поверхности (рис. 336). Радиусом ок-

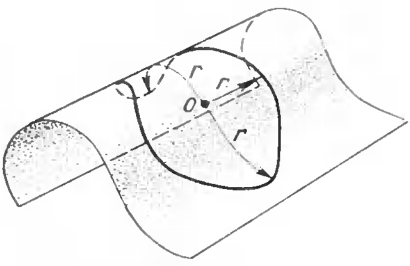


Рис. 336

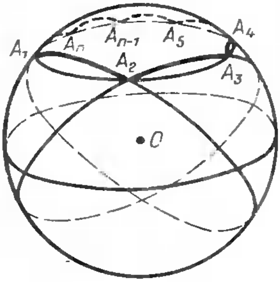


Рис. 337

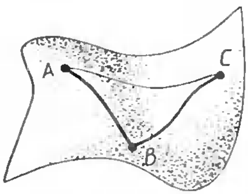


Рис. 338

ружности называют также кратчайшую от центра до точки на окружности.

Можно определить длину окружности и вообще любой линии как предел длин вписанных ломаных, составленной, понятно, из кратчайших (рис. 337).

В общем, возникает возможность развивать геометрию на данной поверхности. Эта геометрия на поверхности называется ее **внутренней геометрией.**

Докажем первую основную теорему внутренней геометрии поверхностей.

Т е о р е м а. ***Расстояние на поверхности обладает обычными свойствами:***

1) $|AB| \geqslant 0$ ***и*** $|AB| = 0$ ***тогда и только тогда, когда*** $A = B$;

2) $|AB| = |BA|$;

3) $|AB| + |BC| \geqslant |AC|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Расстояние $|AB|$ определено как длина самой короткой кривой, соединяющей точки A и B. Если точки A и B различны, то длина такой кривой не может обратиться в нуль, так что $|AB| > 0$. Если же точки A и B совпадают, то соединяющая их кратчайшая кривая сама сводится к точке, так что $|AB| = 0$.

Итак, свойство 1 доказано.

Свойство 2 очевидно, так как длина кривой от A до B та же, что и от B до A.

Если есть три точки A, B, C и берем кратчайшие линии AB, BC, то они вместе соединяют A с C (рис. 338). Расстояние же $|AC|$ считается по самой короткой кривой, соединяющей A и C. Поэтому линия, состоящая из AB и BC, никак не может быть короче, а ее длина равна $|AB| + |BC|$. Значит, $|AB| + |BC| \geqslant |AC|$. $\blacksquare$

Вспомнив общее определение метрического пространства, можно доказанную теорему выразить так: поверхность в смысле ее внутренней геометрии представляет собой метрическое пространство.

Самый простой и самый важный пример геометрии на поверхности, не считая плоскости, представляет геометрия на сфере. Поверхность Земли является в довольно хорошем приближении сферой, поэтому тут речь идет практически о геометрии на Земле, рассматриваемой в больших масштабах. Над Землей простирается «небесная сфера», та воображаемая сфера, на которой нам представляются движения небесных светил. Следовательно, их взаимное расположение подчиняется геометрии на сфере, или, как ее еще называют, сферической геометрии. Она составляет геометрическую основу наблю-

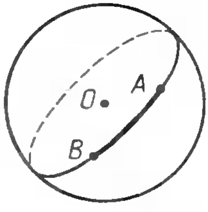


Рис. 339

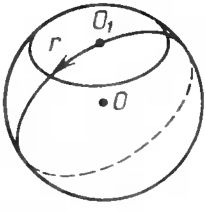


Рис. 340

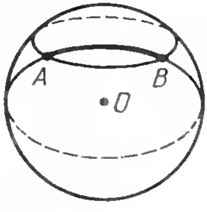


Рис. 341

дательной астрономии. Именно в этой связи начала сферической геометрии были разработаны еще греческими геометрами.

На сфере кратчайшими линиями являются дуги больших окружностей; понятно, кратчайшая — это меньшая из двух дуг большой окружности (рис. 339). В частности, дуга большой окружности короче дуги параллели (отличной от экватора)— линии постоянной широты — между теми же точками на земной поверхности (рис. 340). Поэтому при дальних полетах и дальних плаваниях, если возможно, летят или плывут не по постоянной широте, а в северном полушарии севернее — по дуге большой окружности. Например, кратчайший полет из Москвы до Хабаровска проходит над севером Сибири.

Геометрия на сфере существенно отличается от геометрии на плоскости прежде всего тем, что плоскость не ограничена, а сфера ограничена: расстояния на ней не превосходят длины большой полуокружности. Роль прямых на сфере играют большие окружности, но каждые две из них пересекаются в двух диаметрально противоположных точках; на плоскости же две прямые либо пересекаются только в одной точке, либо вовсе не пересекаются.

Окружность на сфере в смысле ее внутренней геометрии является также обычной окружностью (рис. 341). Но ее центр, центр в смысле внутренней геометрии, лежит на самой сфере, а радиус — это дуга большой окружности, но вовсе не прямолинейный отрезок.

Длина окружности при возрастании радиуса растет, но не пропорционально радиусу; она достигает максимума, дойдя до большой окружности, а потом убывает до нуля, когда окружность сжимается в точку, диаметрально противоположную (рис. 342). Можно сказать, у окружности на сфере два противоположных центра.

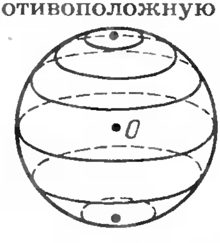


Рис. 342

Между геометрией на сфере и геометрией на плоскости есть много общего. На сфере так же выполняются теоремы о равнобедренном треугольнике, о равенстве треугольников, о точках пересечения биссектрис и медиан, о том, что перпендикуляр короче наклонной, о перпендикулярности радиуса и касательной к окружности и др. Главное здесь то, что на сфере возможно свободное перемещение фигур в такой же степени, как на плоскости.

С другой стороны, соотношения между сторонами и углами треугольников на сфере другие, чем на плоскости. Основное свойство здесь то, что сумма углов треугольника больше π, именно:

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi+\frac{S}{R^2},$$

где S — площадь треугольника, а R — радиус сферы $\left(\frac{S}{R^2}=\omega\right.$ — телесный угол конуса лучей, идущих из центра через точки треугольника).

Замечание 1. Если проводить лучи из центра сферы через точки фигур на ней, то будем получать бесконечные конусы. Так, треугольнику ABC на сфере соответствует трехгранный угол с ребрами OA, OB, OC. Плоские его углы соответствуют сторонам треугольника, а двугранные углы — углам треугольника. Поэтому соотношения между сторонами и углами сферического треугольника те же, что между гранями и двугранными углами трехгранного угла.

Замечание 2. Мы говорили об углах и о площади на сфере. Угол между дугами больших окружностей, исходящих из одной точки,— это угол между их касательными (рис. 343). Но касательная не лежит на сфере и, следовательно, не относится к ее внутренней геометрии. Значит, величину угла надо определять во внутренней геометрии иначе.

На плоскости угол можно измерять стягиваемой им дугой — отношением ее длины к радиусу. Это отношение не зависит от радиуса, так как длина дуги пропорциональна радиусу. Но на сфере, как мы убедились, это не так. Поэтому величину угла можно определить как предел отношений длины дуги l к радиусу r, когда $r\to 0$:

$$\varphi=\lim_{r\to 0}\frac{l}{r}.$$

Это же определение можно принять для величины угла

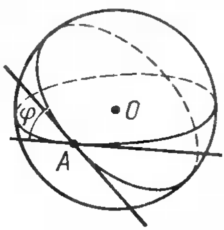


Рис. 343

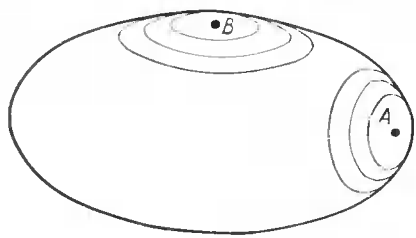


Рис. 344

между кратчайшими и вообще между линиями, исходящими из одной точки на любой поверхности.

Карл Гаусс

Площадь фигур во внутренней геометрии сферы можно определить так же, как на плоскости.

Таким образом, все сказанное о геометрии на сфере можно строго выразить в понятиях ее внутренней геометрии.

Как было сказано, фигуры на сфере допускают столь же свободное движение, как и на плоскости. Сфера геометрически однородна: геометрия ее в одной ее части такая же, как в любой другой.

Но другие поверхности, вообще говоря, геометрически неоднородны. Посмотрите, например, на овальную поверхность на рисунке 344. Длина окружности с центром в точке A растет с радиусом медленнее, а с центром в точке B — быстрее. Тем более на поверхностях могут быть острия, как, скажем, вершины многогранной поверхности и другие особенности. Понятно, что геометрия вокруг вершины отлична от геометрии внутри грани (заметим, что геометрия внутри грани, а также в окрестности ребра в малом такая же, как на плоскости).

Итак, внутренняя геометрия поверхностей может быть очень разнообразной.

Основы внутренней геометрии поверхностей были созданы великим немецким математиком Карлом Гауссом (1777—1855). Более общий подход и более общая теория были развиты советскими геометрами 30—40 лет назад.

37.3. Возможная геометрия реального пространства

Внутреннюю геометрию поверхности можно понимать как такую, которую развивали бы люди, живущие в самой этой поверхности.

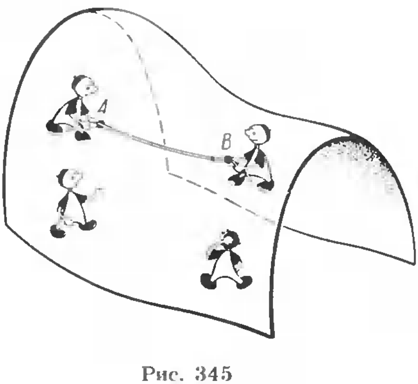


Рис. 345

В самом деле, представим себе какую-нибудь поверхность и живущие в ней разумные существа, не имеющие никакого понятия об окружающем пространстве. Они могли бы измерять на поверхности расстояния шагами или протянутыми нитями (рис. 345), проводить кратчайшие линии и делать другие построения и измерения. В общем, они создали бы свою геометрию, отражающую свойства поверхности, в которой они живут. Это и была бы внутренняя геометрия данной поверхности. Вместе с тем это была бы геометрия того «пространства», в котором они живут, потому что вне ее для них ничего нет.

Это только образное описание того факта, что внутренняя геометрия поверхности полностью определяется измерением длин на самой поверхности. Поверхности имеют разную внутреннюю геометрию, и можно представить себе наших двумерных «людей» на одной или другой поверхности — в одном или другом «пространстве». Можно вообразить, что поверхность, где они живут, деформируется, так что геометрия ее изменяется со временем.

Мы живем в своем трехмерном пространстве, измеряем в нем длины, находим геометрические соотношения, делаем построения... Все это на самом деле, в нашей материальной деятельности. В ней люди обнаружили общие закономерности, выраженные потом в отвлеченной идеализированной форме в евклидовой геометрии. Но почему мы должны быть убеждены, что она абсолютно точно соответствует действительности? Ведь ниоткуда, кроме как из наших привычек и нашего воображения, не следует, что никакие отношения, отличные от евклидовых, невозможны. Например, почему теорема Пифагора не могла бы выполняться только приближенно или длина окружности была бы не в точности пропорциональна радиусу? И если в пределах обычного земного опыта эти отличия ничтожны, то почему бы они не могли обнаружиться в звездных или атомных масштабах?

Таких вопросов не задавал никто, они могли казаться нелепыми и невозможными, пока их не задали себе в начале прошлого века независимо друг от друга два великих математика К. Гаусс и Н. И. Лобачевский. Попытки обнаружить отклонения от евклидовой геометрии не дали тогда никакого результата. Но 100 лет спустя их догадки оправдались: теперь можно считать точно установленным, что в космических масштабах геометрия реального пространства несколько отлична от евклидовой.

37.4. Геометрия Лобачевского

Среди аксиом Евклида была аксиома о параллельных. От других аксиом она отличалась своей сложностью: в принятой теперь формулировке она говорит о всей бесконечной прямой, не пересекающей данную, а в формулировке самого Евклида была гораздо сложнее остальных. Поэтому возникли попытки вывести ее из остальных предпосылок геометрии. Этим занимались на протяжении более 2000 лет многие математики, но все напрасно. Некоторым казалось, что они достигли цели, но потом выяснилось, что они лишь заменяли аксиому Евклида другой равносильной аксиомой.

Пытались доказать аксиому параллельных методом от противного: прийти к противоречию, предполагая противоположное ей утверждение. Но противоречие не получалось.

Н. И. Лобачевский

Наконец в начале XIX в. одновременно у нескольких математиков возникла мысль, что противоречия и не может получиться, что мыслима геометрия, в которой выполняется аксиома: *на плоскости через точку, не лежащую на данной прямой, проходят по крайней мере две прямые, не пересекающие данную.*

Первым выступил с этой идеей Н. И. Лобачевский (1792—1856). В 1826 г. он сделал об этом доклад в Казанском университете (где он учился и работал всю жизнь). В 1829—1830 гг. вышла его первая обширная работа, посвященная новой геометрии. В 1832 г. была опубликована работа венгерского математика Яноша Бойаи (1802—1860) с теми же, в общем, результатами. Гаусс, придя одновременно к тем же выводам, не решился их опубликовать, опасаясь, как он сам объяснял, быть непонятым и подвергнуться нападкам. Опасения были справедливыми. Лобачевский и Бойаи остались непонятыми почти всеми математиками того времени: Лобачевский подвергался насмешкам, а некоторые считали его чуть ли не сумасшедшим. Однако он имел силу убеждения и мужество развивать новую геометрию и публиковать все более развернутые ее изложения. В последние годы жизни, уже ослепший, он продиктовал еще одну книгу о новой геометрии. Когда же после его смерти она была, наконец, понята, ее во всем мире стали называть геометрией Лобачевского, а самого Лобачевского даже сравнивали с Коперником; и справедливо, потому что Лобачевский произвел в геометрии величайший переворот. До него веками без тени сомнения было принято всеми, что есть и мыслима только одна геометрия — та, основы которой изложены у Евклида. А Лобачевский опрокинул это всеобщее убеждение: наряду с евклидовой геометрией он построил другую — неевклидову.

Янош Бойаи

Но нельзя очень порицать современников. Можете ли вы представить себе, чтобы через одну точку проходили две

Бернхард Риман

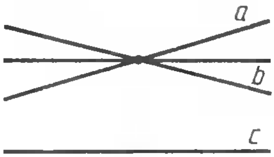


Рис. 346

прямые, параллельные данной? Посмотрите на рисунок 346: конечно же, прямые a, b пересекут прямую c. Значит, геометрия Лобачевского — вымысел и быть такой не может. Однако это заключение слишком поспешно. Сам Лобачевский исходил из убеждения, что реальные пространственные отношения могли бы несколько отличаться от того, что дает евклидова геометрия. Но у Лобачевского это была только гипотеза; возможный реальный смысл его «воображаемой» геометрии оставался неясным, и, строго говоря, не было доказано, что в ней нет никакого логического противоречия.

Вскоре были найдены простые модели геометрии Лобачевского на плоскости и в пространстве. Выяснилось, что ничего невообразимого и невозможного в ней нет; нужно только правильно ее понять. Тогда же она была включена в более общую теорию, созданную немецким математиком Бернхардом Риманом (1826—1866).

37.5. Многомерное пространство

Идея пространства с числом измерения больше трех зародилась еще до XIX в., но основы геометрии таких пространств были созданы к середине XIX в.

В прямоугольных координатах в обычном пространстве точка задается тремя координатами. Представим себе точки, задаваемые каждая n координатами $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Между ними можно определить расстояние так же, как в обычном пространстве:

$$|XY| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

Так получается «n-мерное евклидово пространство». Его геометрия аналогична обычной стереометрии — геометрии трехмерного евклидова пространства. Можно определять расстояния иначе, и тогда будут получаться другие n-мерные пространства.

37.6. Топология

Еще один путь, по которому шло обобщение геометрии, проходил через разделение разных свойств фигур. Самое основное из них — прикосновение. На это указал еще Лобачевский, когда писал, что прикосновение составляет основное свойство тел и дает им название геометрических, когда удерживают это свойство, отвлекаясь от всех остальных. Так, разные части целой фигуры прикасаются друг к другу, фигура прикасается к своим граничным точкам.

Например, для всякого выпуклого многогранника выполняется теорема Эйлера: если e — число вершин, k — число ребер, f — число граней, то $e-k+f=2$. (Вообще для всякой сети на плоскости из хотя бы криволинейных отрезков, не распадающейся на отдельные сети, выполняется такое же соотношение, если k — число «отрезков», f — число ограниченных ими областей (включая и бесконечную часть плоскости.) Форма отрезков и ограниченных ими областей не играет там никакой роли. Важно только прикосновение: по скольку отрезков сходится в вершине сети и по скольку отрезков «прикасается» к областям, ограничивая их. Можно деформировать сеть любым способом, лишь бы эти свойства сохранялись.

Свойства фигур, основанные на «прикосновении»,— это такие их свойства, которые сохраняются при любых обратимых и непрерывных (в обе стороны) отображениях, т. е. при отображениях, происходящих без склеиваний и разрывов.

Со временем эти свойства фигур стали предметом специальных исследований и учение о них выделилось в особую область геометрии, названную топологией, а сами указанные свойства получили название топологических. В начале нашего века возникло общее понятие топологического пространства как такого, где определено только прикосновение фигур (или для любой фигуры — ее «точки прикосновения»; прикосновение фигур определяется тем, что одна содержит «точки прикосновения» другой).

Топология приобрела большое значение и рассматривается как особая область математики, выделенная из геометрии. Значение ее основано на том, что она изучает самые основные свойства пространства и других математических объектов — свойства непрерывности.

Геометрия возникла из задач измерения, а изучение геометрических величин, их соотношений составляет главный предмет элементарной геометрии. Но в топологии измерение не играет в принципе никакой роли; топология является не количественной, а качественной частью математики.

37.7. Другие геометрии

Еще раньше, чем топология, в геометрии определились другие ее части, тоже основанные на особых свойствах фигур.

Например, при параллельном проектировании с одной плоскости на другую длины, вообще говоря, изменяются, но параллельные прямые переходят в параллельные, отношения параллельных отрезков сохраняются, а вместе с ними сохраняются все зависящие от них свойства фигур. Учение об этих свойствах выделяется в особую область, называемую аффинной геометрией.

При центральном проектировании (проектировании из точки) параллельность не сохраняется, но прямые переходят в прямые и сохраняются связанные с этим свойства фигур. Такие свойства называют проективными. Учение о них образует проективную геометрию. Она имеет значение в связи с изображением фигур в перспективе.

До этого речь шла о параллельном или центральном проектировании с плоскости на плоскость и соответственно об аффинной и проективной геометрии плоскости. Но можно их обобщить на пространство, и притом любого числа измерений. Именно к аффинной геометрии относятся те свойства фигур, которые сохраняются при преобразованиях, переводящих прямые в прямые и параллельные в параллельные, а к проективной геометрии относятся свойства, сохраняющиеся при преобразованиях, переводящих прямые в прямые без условия сохранения параллельности. (Книга «О проективных свойствах фигур» французского геометра Жана Понселе (1788—1867) вышла в 1822 г.) Соответственно определяют пространства аффинное и проективное.

37.8. Основания геометрии

Если какое-либо пространство определяется аксиомами, или, как говорят, системой аксиом, то обязательно встает вопрос: возможно ли такое пространство, нет ли в принятых аксиомах противоречия?

В отношении пространства элементарной геометрии вопрос не вставал, потому что оно представлялось уже данным и дело шло о его изучении. Но когда Лобачевский заменил аксиому параллельных на противоположную, вопрос возник со всей остротой: а нет ли тут противоречия, возможна ли, в самом деле, неевклидова геометрия? Вопрос был решен положительно предъявлением соответствующей модели; первую дали поверхности, внутренняя геометрия которых совпадает с геометрией Лобачевского (в области на его плоскости).

Таким образом, первое, обязательное условие для любой системы аксиом — это ее непротиворечивость. Она доказывается предъявлением модели, в которой реализуются данные аксиомы.

Второе условие состоит в том, чтобы аксиомы действительно давали основание, соответствующее теории, т. е. чтобы все свойства того пространства или тех пространств, которые рассматриваются в теории, вытекали из аксиом, а не домысливались, помимо аксиом.

Конечно, нельзя абсолютно все выразить явно в аксиомах, но то, что подразумевается, должно быть по крайней мере общепризнанным, чтобы уж не требовать определения в аксиомах. Например, мы говорим: через две точки проходит прямая, подразумевая, что смысл слова «две» общепризнан. Вообще обычно подразумевают понятие действительного числа известным. Конечно, необходимо стремиться к тому, чтобы подразумевать как можно меньше и чтобы подразумеваемое можно было действительно считать не требующим определения, как общепризнанное и общепонятное.

Давид Гильберт

У Евклида и всех геометров до конца прошлого века многое подразумевалось как само собой понятное, например свойства расположения точек на прямой и плоскости, что точка разбивает прямую на два луча, что из трех точек прямой одна и только одна лежит между двумя другими, что прямая разбивает плоскость. Тогда не возникало мысли выразить это явно в аксиомах, это стали делать лишь к концу XIX в., и в 1899 г. немецкий математик Давид Гильберт (1862—1943) дал полную с современной точки зрения систему аксиом евклидовой геометрии.

У него уже ничего не подразумевается, кроме основных логических понятий. Его «Основания геометрии» начинаются словами: «Мы мыслим три вида вещей, которые называются точками, прямыми, плоскостями». Тут ничего не подразумевается, кроме самого общего понятия «вещь», как то, что обозначается в языке именем существительным. Дальше называются основные отношения, как «точка лежит на прямой» и др., и опять ничего не подразумевается, кроме общего понятия отношения. Свойства отношений явно формулируются в аксиомах, и наглядный их смысл не подразумевается.

Система аксиом Гильберта была потом еще усовершенствована и были даны также другие системы аксиом в том же строгом духе.

Когда предмет аксиом не подразумевается и речь идет о «некоторых вещах», «некоторых отношениях», то встает вопрос о непротиворечивости. Он решается указанием модели на основе действительных чисел (точка плоскости — это пара чисел (x, y), прямая — это уравнение $ax+by+c=0$ с точностью до общего множителя и т. д.).

Второй вопрос касается так называемой полноты системы аксиом: вполне ли она определяет одно пространство, так что к ней уже нельзя добавить — никаких новых аксиом.

Третий вопрос — о независимости аксиом: нет ли среди них лишних, которые можно было бы вывести из других? Это требование у Гильберта сначала еще не было полностью выполнено, его систему довели до совершенства позже.

Теперь имеется непротиворечивая полная система независимых аксиом элементарной геометрии, в которой подразумеваются только основные логические понятия.

Однако при всех этих уточнениях что-то все же подразумевается, и потому вопросы о дальнейшем уточнении системы аксиом не могут быть полностью сняты. Не решается до конца и вопрос непротиворечивости, потому что его решение опирается на какие-то предпосылки, которые сами требуют доказательства непротиворечивости, и т. д. Если Гильберт доказывал непротиворечивость своих аксиом числовой моделью, то сама теория действительных чисел нуждается в доказательстве непротиворечивости. Словом, нет ни в какой науке, ни в самой строгой математике окончательной непротиворечивости, окончательной абсолютной истины. Математика, как все человеческое познание, движется не только в ширь новых открытий и результатов, не только в высь новых теорий, но и в глубину оснований, и за одной достигнутой их глубиной лежит еще другая. Некоторые ученые могут думать, что достигли полной строгости, но приходят другие, более глубоко мыслящие, и задают новые вопросы, и ищут новые решения.

В современной геометрии та или иная система аксиом определяет, как правило, не одно единственное пространство, а класс — некоторый вид пространств, например метрические пространства. Тут полноты системы аксиом заведомо нет, к ней можно добавлять новые аксиомы, выделяя другие классы пространств, как из всех метрических пространств можно выделить, например, евклидовы, а из них именно трехмерное евклидово пространство элементарной геометрии.

37.9. Геометрия и действительность

Отношение геометрии, как и всей математики, к опыту, к данной в нем реальной действительности сложно.

Геометрия возникла из практики, как практическая опытная наука о пространственных формах и отношениях реальных тел. Она явилась, можно сказать, первой главой физики, за которой следовала как вторая глава механика — наука о движении тел: если геометрия трактует взаимное расположение тел, то механика — его изменение.

Однако геометрия постепенно отделилась от опыта, ее предмет составили уже не реальные, а идеальные фигуры. Обращение к опыту, даже к чертежу, было исключено из ее аргументов; доказательство теоремы дается путем одного рассуждения. Это понятно: с идеальными фигурами нельзя ставить опыты, их нельзя ни сделать, ни нарисовать, их в их идеальности можно только мыслить.

Это отделение геометрии от действительности особенно четко проявилось, когда были открыты несоизмеримые отрезки.

Содержание теоремы Пифагора было известно задолго до Пифагора как опытный факт, как закон реальной геометрии, подобно любому закону физики. По этому закону отношение диагонали квадрата к его стороне равно $\sqrt{2}$. Диагональ и сторона несоизмеримы: нет отрезка, укладывающегося в них по целому числу раз.

Но это последнее утверждение не имеет смысла, проверяемого на опыте, потому что абсолютно точное измерение невозможно. Оно вообще не имеет реального смысла, так как никакие реальные предметы не имеют абсолютно точных размеров, никакая реальная длина не может быть абсолютно точно фиксирована, поскольку тела состоят из частиц, не имеющих вполне определенных размеров.

Таким образом, исходя из твердо установленного опытного факта, геометрия делает вывод, не имеющий реального смысла. Физики отбросили бы такой вывод как ненужный и бессмысленный, а математики удержали его, и, мало того, они построили теорию отношений несоизмеримых величин, затем истолковали эти отношения как новый вид чисел — как иррациональные числа, потом на этой почве развили математический анализ и т. д.

Что тут происходило? Во-первых, выводу из опыта был придан абсолютно точный смысл. Во-вторых, из него был сделан логический вывод, затем на этом выводе шло восхождение к новым отвлеченным понятиям.

Такова особенность и сущность математики вообще. Всякой науке свойственна абстракция, но во всех других науках их абстракции сверяются с опытом, им не придается самостоятельного значения. В математике же они принимаются в их идеальном существовании.

Евклидова геометрия сложилась, таким образом, как наука об идеальных фигурах, и вместе с тем казалось, она абсолютно точно соответствует свойствам реального пространства — реальным пространственным отношениям. Однако это убеждение было подвергнуто сомнению Лобачевским и Гауссом и опровергнуто современной физикой — ее выводами из общей теории относительности Эйнштейна. Евклидова геометрия, возникнув из опыта и отделившись от него в своей идеальной точности, пришла с ним хотя бы в некоторое несоответствие. Но это ничуть не затрагивает ее как часть чистой математики, потому что в этом смысле она представляет собой систему логических выводов из аксиом независимо от их возможного отношения к действительности.

Произошло раздвоение единой геометрии на чисто математическую геометрию с ее единственным условием логической точности и на геометрию как физическую теорию, как учение о свойствах реального пространства, сверяемое с опытом, что присуще всякой физической теории. Эту геометрию реального пространства в космических масштабах трактует космология, основанная на общей теории относительности и известных данных о строении Вселенной.

Во всем этом есть как бы противоречие: идеально точная евклидова геометрия оказалась неточной. Возникнув как опытная наука, она превратилась, можно сказать, в собственную противоположность — в науку, которая сама по себе не заботится о соответствии с опытом. Такие реальные противоречия, такие переходы в противоположность, такое раздвоение единого — единой геометрии — охватываются общим понятием диалектики.

В. И. Ленин писал: «Раздвоение единого и познание противоречивых частей его... есть *с у т ь*... диалектики...

Правильность этой стороны содержания диалектики должна быть проверена историей науки.» (Полн. собр. соч.— т. 29.— с. 316).

Так, в истории науки единая геометрия раздвоилась на противоречивые части, разошедшиеся в чистую математику и в физику.

Сочетание двух взаимно противоположных сторон геометрии проходило через весь наш курс с самого начала. Мы постоянно ссылались на него и вместе с тем старались вести строго логические выводы из аксиом без ссылок на опыт, чертежи и пр.

Всякая теория чистой математики, взятая именно в этом ее качестве чисто математической теории, является системой логических выводов, и ее собственная математическая истинность состоит только в ее непротиворечивости. Но вместе с тем она имеет смысл и значение только в меру того, насколько она так или иначе, прямо или косвенно через другие теории, служит познанию действительности и овладению ею в практике.

Математические теории можно уподобить станкам, значение которых состоит в том, чтобы делать нужные людям вещи, сами же по себе они не нужны. Но как станку нужна точная и прочная структура, так и чистой математике нужна логическая строгость — прочность ее структуры. В станке непосредственно работает один резец, но без станка в целом он не будет хорошо работать. Так и в математике: непосредственно применяться в практике могут отдельные ее части и выводы, но, чтобы обеспечить точность их применений, нужны целостные математические теории, вся логическая структура математики в целом. Сказанное определяет отношение к действительности «геометрии» разных пространств: они служат теоретическим средством для других наук.

Представим себе, например, какую-нибудь физическую систему, будь то машина, газ в данном сосуде, атом кислорода или даже отдельная частица — электрон. Система может находиться в разных состояниях. Множество всех ее возможных состояний образует то, что в физике называют фазовым пространством системы. Оно характеризует свойства системы. Для его теоретического описания, для выводов, его касающихся, полезной и важной оказывается подходящая «геометрия» из арсенала отвлеченных геометрий разных пространств. (Пространство состояний квантовой системы даже бесконечномерно.)

В частности, общее понятие метрического пространства оказывается полезным, когда определяют «расстояние» между «вещами» или явлениями одного и того же рода как меру того, насколько одно отлично от другого. Например, определяют расстояние между двумя цветами (ощущениями цвета), характеризующими степень их различия. Множество всех цветов (цветовых ощущений) оказывается, таким образом, некоторым метрическим пространством. Это пространство на самом деле рассматривают в науке — в цветоведении, оно характеризует цветное зрение человека. Кстати, оно трехмерно, так как каждое ощущение цвета — цвет можно получить как комбинацию трех основных ощущений — цветов: красного, зеленого и синего. Это записывают в виде $Ц = x\text{К} + y\text{З} + z\text{С}$, где x, y, z — интенсивности красного, зеленого и синего в каких-либо единицах.

Но самый яркий пример применения отвлеченной геометрии — это общая теория относительности, математическим аппаратом которой послужила общая теория пространств. Начала этой теории были заложены немецким математиком Риманом за 60 с лишним лет до создания общей теории относительности. Выросшая на почве математических абстракций, теория вернулась к исходной геометрической действительности как орудие ее более глубокого познания.

«Познание есть отражение человеком природы. Но это не простое, не непосредственное, не цельное отражение, а процесс ряда абстракций, формирования, образования понятий, законов etc. каковые понятия, законы etc., ... и *охватывают* условно, приблизительно универсальную закономерность вечно движущейся и развивающейся природы.» (Ленин В. И. Полн. собр. соч.— т. 29.— с. 163—164).

Движение познания бесконечно...

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Александр Данилович Александров,
Алексей Леонидович Вернер,
Валерий Идельевич Рыжик

ГЕОМЕТРИЯ
Пробный учебник для 9—10 классов средней школы

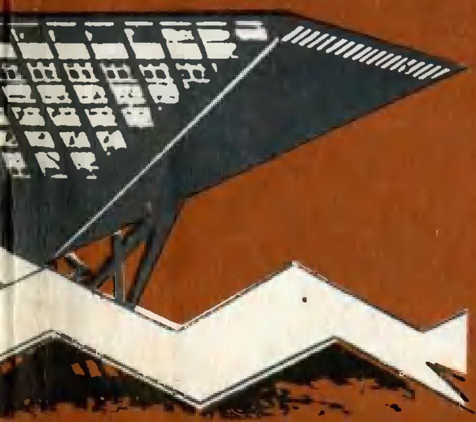
Зав. редакцией *Р. А. Хабиб*
Редактор *Н. И. Никитина*
Младшие редакторы *Л. И. Заседателева, Е. А. Сафронова*
Художник переплета, титула, форзацев *Б. Л. Николаев*
Художники рис. *В. В. Костин, Н. Н. Рожнов*
Художественный редактор *Е. Н. Карасик*
Технический редактор *С. С. Якушкина*
Корректоры *Н. В. Красильникова, О. И. Кузовлева*

ИБ № 10393
Сдано в набор 17.09.86. Подписано к печати 24.02.87. Формат $60\times90^1/_{16}$. Бум. офс. № 2. Гарнитура школьная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 17,0+0,25 форз. Усл. кр.-отт. 17,75. Уч.-изд. л. 16,36+0,39 форз. Тираж 40 400 экз. Заказ 402. Цена 30 коп.

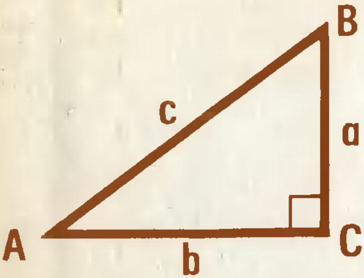
Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 129846, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 410004, Саратов, ул. Чернышевского, 59.



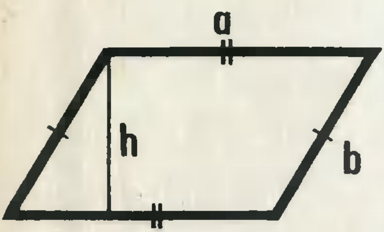




PETRO

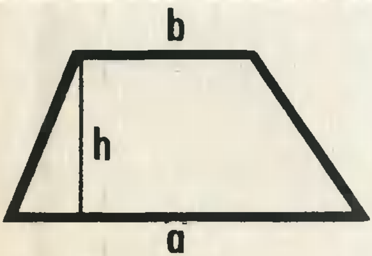


$$\sin A = \frac{a}{c}, \cos A = \frac{b}{c}$$

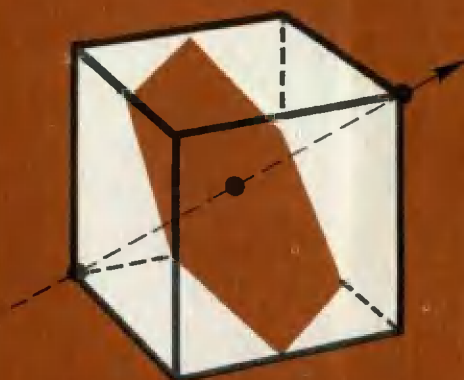
$$a^2 + b^2 = c^2$$

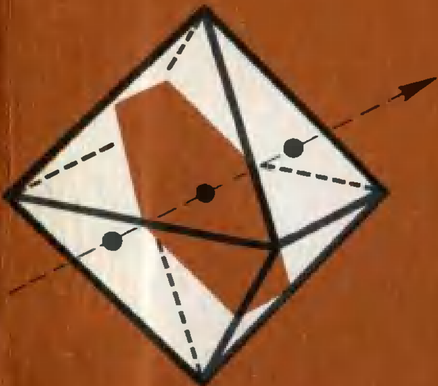


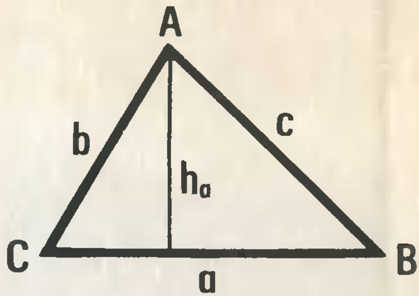
$$S = ah$$



$$S = \frac{a+b}{2} h$$





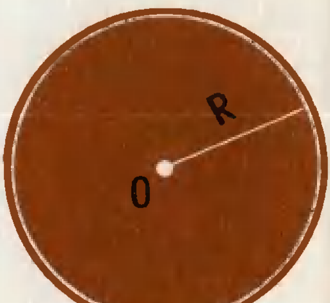


$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$$

$$S=\frac{1}{2}ah_a$$

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$



$$S=\pi R^2$$

$$C=2\pi R$$

30 к.

ГЕОМЕТРИЯ

9-10